

Capitolo 2

La propagazione delle onde elettromagnetiche

2.1 Introduzione

Una delle peculiarità dell'elettromagnetismo rispetto ad altri fenomeni ondulatori è la natura vettoriale delle grandezze fisiche in gioco. In questo capitolo si terrà conto di questo aspetto, mantenendo tuttavia l'ipotesi che le grandezze siano ancora dipendenti da una sola variabile spaziale. Ciò permetterà di semplificare enormemente la parte matematica e conseguentemente dedicare tutta l'attenzione alla comprensione fenomenologica. Si metterà in evidenza come le variazioni delle caratteristiche del mezzo provocano inevitabilmente la generazione di onde riflesse. Questo risulta particolarmente chiaro se si segue un approccio nel dominio del tempo. Purtroppo con tale approccio è possibile una risoluzione analitica del problema solo quando il mezzo presenta particolari proprietà: lineare, isotropo, privo di perdite e temporalmente non dispersivo. Tale limite è in parte superato dall'approccio nel dominio della frequenza che verrà utilizzato nel presente capitolo per determinare la soluzione nel caso di mezzi con perdite.

2.2 Analisi nel dominio del tempo

Si considerino le equazioni di Maxwell nel dominio del tempo, in assenza di sorgenti e nell'ipotesi di mezzi lineari, privi di perdite e temporalmente non dispersivi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \bar{\mathcal{E}} = -\mu \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial t} \\ \nabla \times \bar{\mathcal{H}} = \varepsilon \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial t}. \end{array} \right.$$

Se si suppone per semplicità che tutte le grandezze sono costanti al variare di x e y , e si proiettano le due equazioni vettoriali sui tre assi di un sistema di riferimento cartesiano si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \bar{\mathcal{E}} = -\mu \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial t} \implies \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial t} \\ 0 = \mathcal{H}_z \end{cases} \\ \nabla \times \bar{\mathcal{H}} = \varepsilon \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial t} \implies \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial t} \\ 0 = \mathcal{E}_z \end{cases} \end{array} \right.$$

Due sono le conseguenze più evidenti delle ipotesi fatte:

- le componenti lungo z sono nulle, ovvero i due vettori giacciono su piani ortogonali all'asse z ;
- \mathcal{E}_x è legato solo ad \mathcal{H}_y e \mathcal{E}_y è legata solo ad \mathcal{H}_x .

In virtù di queste considerazioni e della linearità delle equazioni, si può applicare il principio di sovrapposizione degli effetti e quindi studiare separatamente le quantità \mathcal{E}_x , \mathcal{H}_y e \mathcal{E}_y , \mathcal{H}_x senza perdere generalità. Essendo il procedimento e gli eventuali commenti del tutto identici, nel seguito si considererà solo il primo caso per il quale le equazioni da integrare sono le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Derivando la seconda rispetto al tempo si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z} \right) = -\varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial t^2}$$

scambiando la derivazione rispetto a z con la derivazione rispetto a t ed impiegando la prima delle (2.1) si ottiene una equazione nella sola variabile \mathcal{E}_x :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial z^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial t^2}. \quad (2.2)$$

Questa equazione, è del tipo (1.1) e governa l'evoluzione spazio temporale del campo elettrico nell'ambito delle ipotesi fatte. L'andamento del campo elettrico è quindi del tipo:

$$\mathcal{E}_x(z, t) = Af(t - z/v) + Bg(t + z/v), \quad (2.3)$$

ovvero due onde elettromagnetiche che si propagano in direzione opposta con una velocità:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}.$$

Nota il campo elettrico, il campo magnetico può essere calcolato attraverso la prima delle (2.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} = -\frac{1}{\mu} \left(A \frac{\partial f(t-z/v)}{\partial z} + B \frac{\partial g(t+z/v)}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{1}{\mu} (A f'(t-z\sqrt{\varepsilon\mu})(-\sqrt{\varepsilon\mu}) + B g'(t+z\sqrt{\varepsilon\mu})\sqrt{\varepsilon\mu}) \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (A f'(t-z\sqrt{\varepsilon\mu}) - B g'(t+z\sqrt{\varepsilon\mu})); \end{aligned}$$

dove si è posto $f'(\xi) = \frac{df(\xi)}{d\xi}$ e $g'(\xi) = \frac{dg(\xi)}{d\xi}$. Visto che se $\mathcal{H}_y = h(t-z\sqrt{\varepsilon\mu})$ allora $\frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial t} = h'(t-z\sqrt{\varepsilon\mu})$, dall'equazione sopra segue che:

$$\mathcal{H}_y(z, t) = \frac{1}{\eta} \left(A f(t-z/v) - B g(t+z/v) \right) \quad (2.4)$$

dove

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

è l'impedenza intrinseca del mezzo [1]. Nel caso di propagazione nel vuoto e quindi con buona approssimazione anche nell'aria:

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\Omega.$$

In un mezzo dielettrico non magnetico $\mu \simeq \mu_0$:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{n} = \frac{\eta_0}{n}.$$

L'andamento di un generico impulso elettromagnetico che si propaga nel verso positivo dell'asse z avente il campo elettrico orientato lungo l'asse x ed il campo magnetico orientato lungo l'asse y è riportato in figura 2.1(a). L'andamento nel caso di un impulso che si propaga nel verso opposto è riportato in figura 2.1(b). In entrambi i casi, essendo presente o solo l'onda diretta o solo l'onda riflessa, il rapporto tra in campo elettrico e quello magnetico è uguale all'impedenza intrinseca. L'impedenza intrinseca del mezzo definisce infatti il rapporto tra in campo elettrico e quello magnetico dell'onda diretta e dell'onda riflessa separatamente. Se sono presenti entrambe, il rapporto tra il campo elettrico complessivo ed

il campo magnetico complessivo non è in generale uguale all'impedenza intrinseca. Facendo il rapporto tra la (2.3) e la (2.4) si ottiene infatti:

$$\frac{\mathcal{E}_x}{\mathcal{H}_y} = \eta \frac{Af(t - z/v) + Bg(t + z/v)}{Af(t - z/v) - Bg(t + z/v)}$$

che coincide con η o $-\eta$ $\forall t$ e $\forall z$ rispettivamente nel caso $B = 0$ o $A = 0$. Questo ha conseguenze importanti: se infatti le caratteristiche del mezzo cambiano, il conseguente cambiamento dell'impedenza intrinseca richiede la presenza contemporanea dell'onda diretta e di quella riflessa. Tale aspetto verrà approfondito nel paragrafo seguente.

In modo del tutto analogo a quanto appena visto, si può ricavare la soluzione per la coppia $\mathcal{E}_y, \mathcal{H}_x$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_y(z, t) &= Af(t - z/v) + Bg(t + z/v) \\ \mathcal{H}_x(z, t) &= -\frac{1}{\eta} \left(Af(t - z/v) - Bg(t + z/v) \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

L'andamento di un generico impulso è riportato in figura 2.2.

Nel caso in cui il campo elettrico e quello magnetico non sono orientati lungo gli assi cartesiani, è comunque possibile scomporli nelle sue componenti lungo gli assi:

$$\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_x \hat{i} + \mathcal{E}_y \hat{j} \quad \bar{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_x \hat{i} + \mathcal{H}_y \hat{j}.$$

La soluzione delle equazioni di Maxwell è semplicemente una combinazione lineare delle (2.3), (2.4) e (2.5). Al solito, considerando separatamente l'impulso trasmesso e quello riflesso, per ognuno di essi, l'orientamento del vettore campo elettrico, del vettore campo magnetico e della direzione di propagazione sono legati dalla seguente relazione:

$$\bar{\mathcal{H}} = \frac{1}{\eta} \hat{k} \times \bar{\mathcal{E}} \quad (2.6)$$

dove \hat{k} è il versore che individua direzione e verso di propagazione.

2.2.1 Effetti delle condizioni al contorno

Si analizzerà ora cosa accade ad un impulso elettromagnetico quando questo incide una superficie che separa due mezzi con caratteristiche elettromagnetiche differenti. In particolare si analizzeranno gli effetti che hanno sulla propagazione degli impulsi le seguenti situazioni:

- mezzo dielettrico omogeneo affacciato ad un conduttore elettrico ideale;
- mezzo dielettrico omogeneo affacciato ad un secondo dielettrico con differente indice di rifrazione.

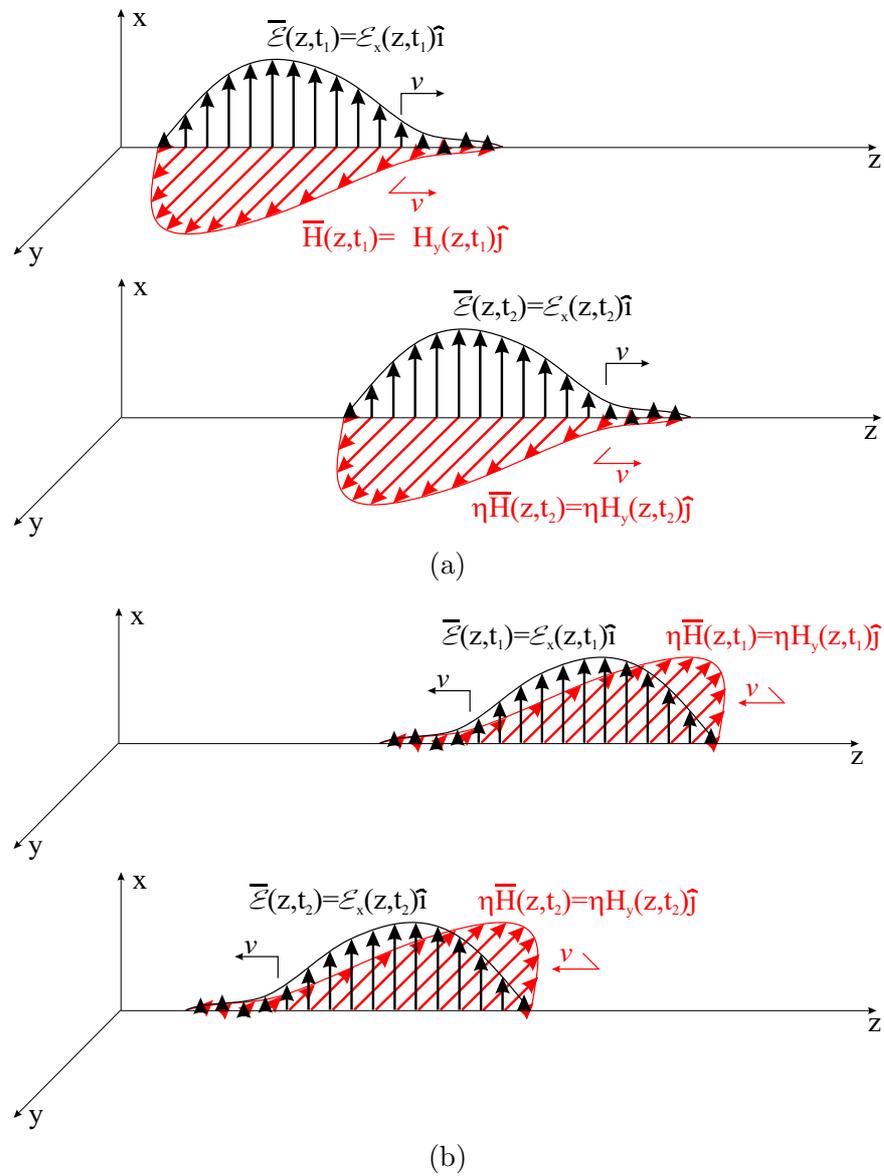


Figura 2.1: Andamento del campo elettrico e del campo magnetico in due istanti successivi nel caso di un impulso diretto (a) e riflesso (b). Essendo presente in entrambi i casi un solo tipo di impulso, si è riportato $\eta\mathcal{H}_y$ anzichè \mathcal{H}_y in modo da avere, in ogni punto, due vettori con lo stesso modulo.

In entrambi i casi si farà riferimento alla situazione illustrata in figura 2.3, in cui la superficie che separa le due regioni è un piano ortogonale all' asse z e all'istante $t_0 = 0$ nel mezzo

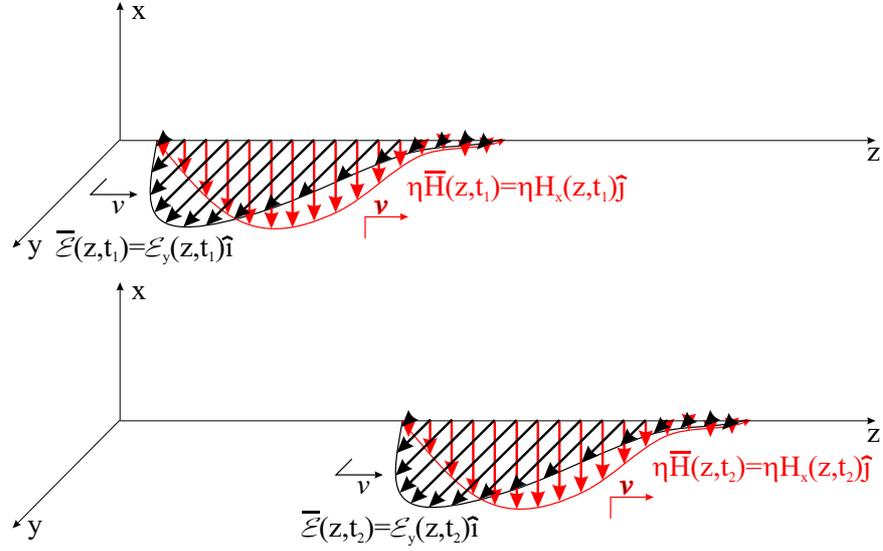


Figura 2.2: Andamento del campo elettrico e del campo magnetico in due istanti successivi nel caso di un impulso diretto con il vettore campo elettrico orientato lungo l'asse y .

dielettrico si propaga un solo impulso nel verso positivo:

$$\mathcal{E}_x(z, t_0) = Af(t - z/v) \quad \forall z < L \quad (2.7)$$

$$\mathcal{H}_y(z, t_0) = \frac{A}{\eta} f(t - z/v) \quad \forall z < L.$$

Quando le caratteristiche del mezzo cambiano in modo discontinuo, il campo elettrico ed il campo magnetico che si trovano a destra ed a sinistra della superficie di discontinuità sono legati da particolari relazioni dette condizioni di continuità [1]:

$$\bar{\mathcal{E}}(L^-, t) = \bar{\mathcal{E}}(L^+, t) \quad \left(\bar{\mathcal{H}}(L^-, t) - \bar{\mathcal{H}}(L^+, t) \right) \times \hat{n} = \bar{\mathcal{J}}_s \quad \forall t, \quad (2.8)$$

con \hat{n} versore normale alla superficie di separazione. Nel caso in esame, essendo i due vettori tangenti alla superficie di separazioni ed in particolare $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_x \hat{i}$ e $\bar{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_y \hat{j}$, segue:

$$\mathcal{E}_x(L^-, t) = \mathcal{E}_x(L^+, t) \quad \mathcal{H}_y(L^-, t) - \mathcal{H}_y(L^+, t) = J_{sx} \quad \forall t \quad (2.9)$$

e $\bar{\mathcal{J}}_s = J_{sx} \hat{i}$.

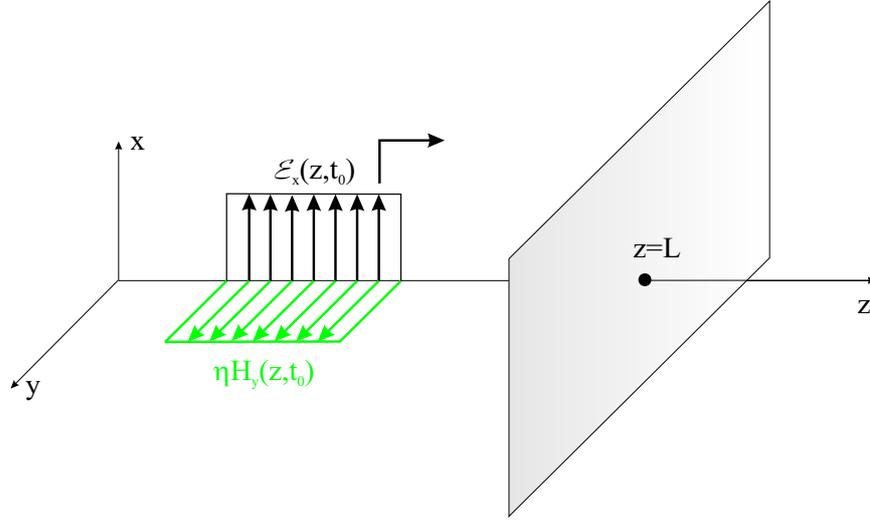


Figura 2.3: Andamento del campo elettrico \mathcal{E}_x e di $\eta\mathcal{H}_y$ a $t_0 = 0$. Si è riportato $\eta\mathcal{H}_y$ anzichè \mathcal{H}_y in modo da avere, in ogni punto, due vettori con lo stesso modulo. In $z = L$ è posizionata la superficie di separazione.

Mezzo dielettrico affacciato ad un conduttore elettrico ideale

All'interno di un conduttore ideale il campo è identicamente nullo:

$$\mathcal{E}_x(L^+, t) = 0 \quad \mathcal{H}_y(L^+, t) = 0 \quad \forall t$$

e quindi in base alle (2.9) le condizioni che devono essere soddisfatte dal campo sono:

$$\mathcal{E}_x(L^-, t) = 0 \quad \mathcal{H}_y(L^-, t) = J_{sx}(L^-) \quad \forall t. \quad (2.10)$$

All'interno del dielettrico, l'espressione generale per il campo elettrico ed il campo magnetico è la seguente:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_x(z, t) = Af(t - z/v) + Bg(t + z/v) \\ \mathcal{H}_y(z, t) = \frac{1}{\eta}Af(t - z/v) - \frac{1}{\eta}Bg(t + z/v) \end{cases}$$

In $z = L$ è posizionato il piano che separa il materiale dielettrico dal conduttore quindi:

$$\mathcal{E}_x(L, t) \equiv 0 \quad \forall t.$$

↓

$$Af(t - L/v) + Bg(t + L/v) = 0 \quad \forall t$$

↓

$$\begin{aligned}
 Af(t - L/v) &= -Bg(t + L/v) \quad \forall t \\
 &\Downarrow \\
 g(t + L/v) &= -\frac{A}{B}f(t - L/v) \quad \forall t \\
 &\Downarrow \\
 g(\xi) &= -\frac{A}{B}f(\xi - 2L/v)
 \end{aligned}$$

con $\xi = t + L/v$. Sostituendo nelle (2.7):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_x(z, t) = Af(t - z/v) - Af(t + z/v - 2L/v) \\ \mathcal{H}_y(z, t) = \frac{1}{\eta} (Af(t - z/v) + Af(t + z/v - 2L/v)) \end{array} \right. \quad \forall z \leq L \quad (2.11)$$

Per il campo elettrico, la situazione è del tutto identica a quella trattata nel paragrafo 1.7; conseguentemente, la figura 1.22 può essere interpretata come la rappresentazione dell'evoluzione spazio temporale di \mathcal{E}_x . Man mano che l'impulso incidente si esaurisce contro la parete, quello riflesso esce da essa. Dal punto di vista fisico, la generazione dell'impulso riflesso è dovuta alla presenza della densità di corrente superficiale J_{sx} prodotta sulla superficie dal campo elettrico dell'impulso incidente. In altre parole, l'impulso incidente produce sul conduttore una corrente superficiale tale da generare a sua volta un secondo impulso che si propaga in direzione opposta al primo. La seconda delle (2.10) e la seconda delle (2.11) permettono di determinare l'andamento temporale di J_{sx} :

$$J_{sx} = \frac{2A}{\eta} f(t - L/v)$$

I conduttori ideali si comportano come superfici perfettamente riflettenti. Questa proprietà viene utilizzata ad esempio nelle guide d'onda per confinare il campo in una porzione limitata dello spazio. Il coefficiente di riflessione è definito come il rapporto tra l'ampiezza del campo elettrico dell'onda riflessa e quello dell'onda incidente:

$$r = \frac{B}{A}.$$

Nel caso di un conduttore ideale:

$$r = -1;$$

il segno meno indica che il campo elettrico dell'impulso riflesso ha verso opposto a quello incidente, mentre il campo magnetico ha lo stesso verso.

Dielettrico-Dielettrico

Rispetto al caso precedente le differenze sono due:

- il campo elettromagnetico si può propagare anche nel secondo mezzo;
- non possono esistere correnti superficiali.

L'assenza di correnti superficiali fa sì che le condizioni di continuità siano:

$$\mathcal{E}_{x1} = \mathcal{E}_{x2} \quad \mathcal{H}_{y1} = \mathcal{H}_{y2}.$$

A fronte di un impulso incidente, la necessità di garantire la continuità sia del campo elettrico che di quello magnetico impone l'esistenza di un impulso trasmesso. D'altro canto, i due mezzi sono caratterizzati da due impedenze intrinseche differenti: $\eta_1 = \sqrt{\mu_1/\epsilon_1}$, $\eta_2 = \sqrt{\mu_2/\epsilon_2}$. Questo fa sì che il rapporto tra le ampiezze del campo elettrico e del campo magnetico dell'impulso incidente e di quello trasmesso debba cambiare quando si passa da un mezzo all'altro. Per poter soddisfare anche questa seconda condizione, è necessaria la presenza di un'onda riflessa.

I legami delle ampiezze delle varie onde si ottengono imponendo la continuità del campo elettrico e del campo magnetico all'interfaccia $z = L$:

$$\begin{cases} Af(L, t) + Bg(L, t) = Ch(L, t) & \forall t \\ \frac{A}{\eta_1}f(L, t) - \frac{B}{\eta_1}g(L, t) = \frac{C}{\eta_2}h(L, t) & \forall t. \end{cases}$$

Dalla prima, dovendo essere soddisfatta per ogni t , segue che $f(\xi) = h(\xi)$ e $g(\xi) = f(\xi - 2L/v)$ e $A + B = C$; dalla seconda: $\frac{A}{\eta_1} - \frac{B}{\eta_1} = \frac{C}{\eta_2}$. Si ottiene così un sistema di due equazioni:

$$\begin{cases} A + B = C \\ \frac{A}{\eta_1} - \frac{B}{\eta_1} = \frac{C}{\eta_2} \end{cases}$$

nelle tre incognite A , B e C . Tipicamente si ricavano B e C in funzione dell'ampiezza dell'impulso incidente A che è supposta nota:

$$\begin{cases} B = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} A \\ C = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} A. \end{cases}$$

In questo caso oltre al coefficiente di riflessione $r = B/A$ si può definire un coefficiente di trasmissione $t = C/A$. Sostituendo le espressioni sopra si ottiene:

$$r = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2}$$

$$t = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}.$$

La maggior parte dei materiali di interesse pratico sono non magnetici, $\mu \simeq \mu_0$, quindi:

$$\begin{aligned} r &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\ t &= \frac{2n_1}{n_1 + n_2}. \end{aligned}$$

È bene osservare che se $n_1 < n_2$ allora $r < 0$ cioè il verso del vettore campo elettrico dell'onda riflessa è opposto a quello del campo elettrico incidente, mentre il vettore campo magnetico mantiene il verso. Se $n_2 < n_1$ si scambiano le proprietà.

Esempio

Si consideri la propagazione di un impulso rettangolare avente un campo elettrico di ampiezza E_i ed un campo magnetico di ampiezza $H_i = E_i/\eta_1$ che si propaga in un mezzo con indice di rifrazione n_1 .

Se ora l'impulso incide su una superficie che delimita il mezzo da un secondo mezzo con indice di rifrazione $n_2 = 2n_1$, a causa del cambiamento dell'impedenza intrinseca si genera oltre all'impulso trasmesso di ampiezza E_t e H_t , un impulso riflesso E_r , H_r . Essendo $n_2 = 2n_1$ segue che

$$r = -1/3 \quad t = 2/3$$

quindi

$$E_r = -\frac{1}{3}E_i \quad E_t = \frac{2}{3}E_i.$$

Il campo magnetico dei vari impulsi si ricava immediatamente dividendo il campo elettrico per l'impedenza intrinseca del mezzo:

$$H_r = -E_r/\eta_1 = -\frac{1}{3}E_i\eta_1 = \frac{1}{3}H_i \quad H_t = E_t/\eta_2 = \frac{n_2}{n_1}E_t/\eta_2 = \frac{4}{3}H_i.$$

L'andamento spaziale ad un generico istante è riportato in figura 2.4. Si noti come le ampiezze dei vari impulsi siano tali da soddisfare sia la condizione di continuità dei vettori complessivi che la condizione imposta dall'impedenza intrinseca. In particolare nel mezzo 2 il rapporto \mathcal{E}/\mathcal{H} cala essendo minore il valore di η_2 rispetto a quello del mezzo 1. Si noti inoltre che l'estensione spaziale dell'impulso trasmesso è la metà di quella dell'impulso riflesso a causa del fatto che nel mezzo 2 la velocità di propagazione è la metà di quella del mezzo 1:

$$v_2 = \frac{c}{n_2} = \frac{2c}{n_1}.$$

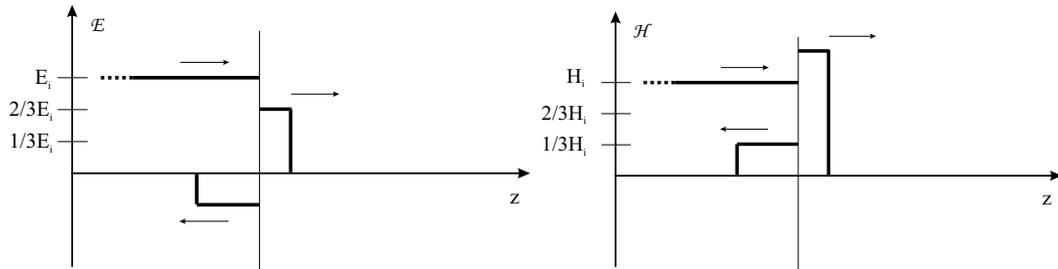


Figura 2.4: Andamento del campo elettrico e del campo magnetico nel caso di due dielettrici con differente indice di rifrazione.

2.2.2 Esercizi risolti

Esercizio

In figura 2.5 sono riportate le componenti del campo elettrico all'istante $t = 0$ di un impulso che si propaga in aria nella direzione positiva dell'asse z . Disegnare l'andamento temporale delle componenti del campo elettrico e del campo magnetico in $\bar{z} = 0$.

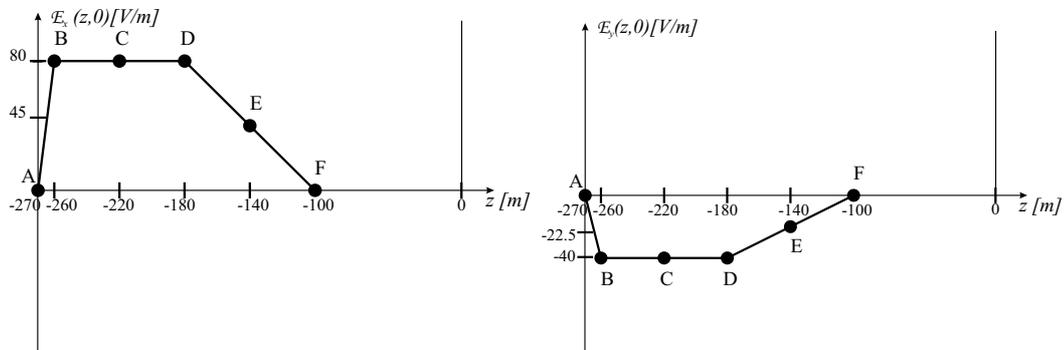


Figura 2.5: Andamento spaziale delle componenti del campo elettrico \vec{E} all'istante iniziale $t = 0$.

Soluzione

Indicando con ΔT_F il tempo che impiega il punto F per arrivare in $\bar{z} = 0$ e con z_F l'ascissa in cui si trova il punto all'istante $t = 0$, si ha:

$$\Delta T_F = \frac{\bar{z} - z_F}{c_0} = \frac{(0 - 100)[m]}{3 \cdot 10^8[m/s]} = 33 \cdot 10^{-8}[s] = 0.33[\mu s].$$

Le distanze tra i punti F , E , D , C e B sono le stesse e sono pari a $\Delta z = 40[m]$. La stessa cosa vale per i ritardi relativi:

$$\Delta T = \frac{\Delta z}{c_0} = \frac{40[m]}{3 \cdot 10^8[m/s]} = 0.13[\mu s]$$

mentre il ritardo del punto A rispetto a B vale:

$$\Delta T_{BA} = \frac{\Delta z_{BA}}{c_0} = \frac{10[m]}{3 \cdot 10^8[m/s]} = 0.033[\mu s]$$

Noti tutti gli istanti di arrivo, per punti si ricostruisce gli andamenti temporali delle componenti del campo elettrico riportati in figura 2.6. Per quel che riguarda il campo magnetico,

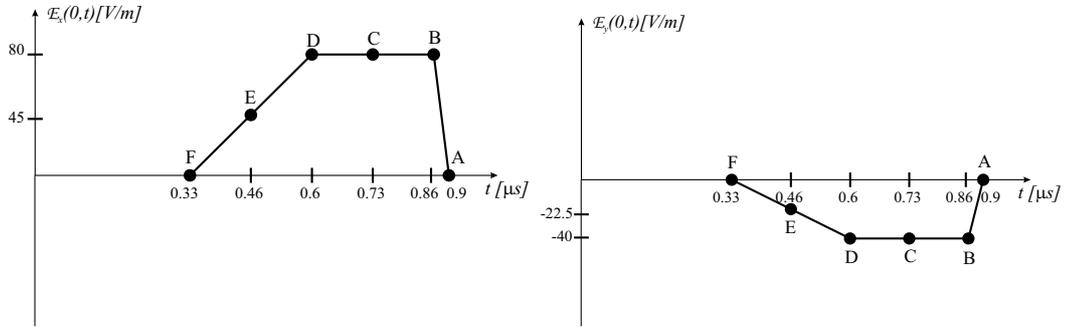


Figura 2.6: Andamento temporale delle componenti del campo elettrico \vec{E} in $\vec{z} = 0$.

ricordando che:

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{k} \times \vec{E},$$

ed essendo $\hat{k} = \hat{z}$, si ottiene:

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{z} \times (\mathcal{E}_x \hat{i} + \mathcal{E}_y \hat{j}) = \frac{1}{\eta} [\mathcal{E}_x (\hat{z} \times \hat{i}) + \mathcal{E}_y (\hat{z} \times \hat{j})] = \frac{1}{\eta} (\mathcal{E}_x \hat{j} + \mathcal{E}_y (-\hat{i}))$$

e quindi:

$$\mathcal{H}_x = -\frac{\mathcal{E}_y}{\eta} \qquad \mathcal{H}_y = \frac{\mathcal{E}_x}{\eta}.$$

Da queste si ricavano le ampiezze delle componenti nei vari punti:

$$\mathcal{H}_{xD} = -\frac{\mathcal{E}_{yD}}{\eta} = -\frac{-40[V/m]}{377[\Omega]} = 106[mA/m];$$

$$\mathcal{H}_{xE} = -\frac{\mathcal{E}_{yE}}{\eta} = -\frac{-22.5[V/m]}{377[\Omega]} = 60[mA/m];$$

$$\mathcal{H}_{yD} = -\frac{\mathcal{E}_{xD}}{\eta} = \frac{80[V/m]}{377[\Omega]} = 212[mA/m];$$

$$\mathcal{H}_{yE} = -\frac{\mathcal{E}_{xE}}{\eta} = \frac{45[V/m]}{377[\Omega]} = 120[mA/m].$$

Gli andamenti temporali delle componenti del campo magnetico sono riportati in figura 2.7.

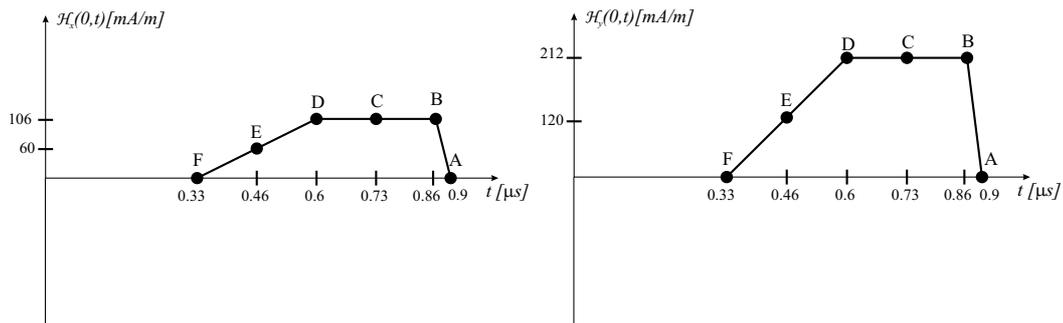


Figura 2.7: Andamento temporale delle componenti del campo magnetico \vec{H} in $\bar{z} = 0$.

Esercizio

L'impulso $\mathcal{E}_x(z,t) = Af(t - z/v)$ riportato in figura 2.8 si propaga in aria ed incide ortogonalmente sulla superficie marina. Si calcoli l'andamento temporale del campo elettrico e del campo magnetico ad una altezza di 300 m dalla superficie marina la cui permittività dielettrica relativa, nell'ipotesi di poter trascurare le perdite, vale $\epsilon_{r2} = 81$.

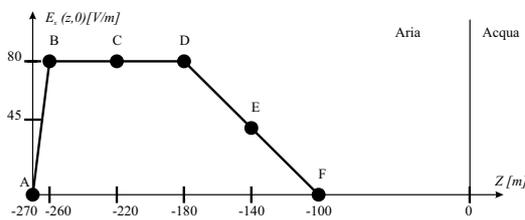


Figura 2.8: Andamento del campo elettrico \mathcal{E}_x all'istante iniziale $t = 0$.

Soluzione

L'orientamento dell'asse z è entrante nella superficie marina, quindi il punto a quota 300m si trova in $z = \bar{z} = -300$ m. Per determinare l'andamento temporale dell'impulso è necessario calcolare il tempo impiegato dai vari punti evidenziati in figura 2.8 per raggiungere il punto \bar{z} . Assumendo $n_{aria} = 1$, la velocità di propagazione del campo elettromagnetico nell'aria vale $c = c_0 = 3 \cdot 10^8$ m/s, quindi il tempo che impiega il punto F per arrivare sulla superficie marina vale:

$$T_a = \frac{\Delta z}{c} = \frac{100m}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 0.333 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 0.333\mu\text{s}.$$

Il tempo che impiega successivamente il punto F dell'onda riflessa per arrivare in $z = -300$ m vale:

$$T_r = \frac{\Delta z}{c} = \frac{300m}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 10^{-6} \text{ s} = 1\mu\text{s}.$$

L'istante t_F in cui il punto F dell'impulso riflesso giunge in $z = -300$ m è quindi

$$t_F = T_a + T_r = 1.333\mu\text{s}.$$

Rispetto al punto F, il punto E presenta un ritardo temporale pari a:

$$\Delta T_{EF} = \frac{z_F - z_E}{c} = \frac{40m}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 0.133\mu\text{s}$$

quindi:

$$t_E = t_F + \Delta T_{EF} = 1.466\mu\text{s}.$$

Essendo $z_F - z_E = z_E - z_D = z_D - z_C = z_C - z_B$ segue che $\Delta T_{EF} = \Delta T_{DE} = \Delta T_{CD} = \Delta T_{BC} = 0.133\mu\text{s}$, mentre $\Delta T_{AB} = 0.033\mu\text{s} = 33\text{ns}$.

Per determinare l'ampiezza del campo elettrico dell'impulso riflesso è sufficiente calcolare il coefficiente di riflessione r :

$$r = \frac{n_{aria} - n_{acqua}}{n_{acqua} + n_{aria}} = \frac{1 - 8}{10} = -0.7.$$

Indicando con \mathcal{E}_B^+ il valore assunto dal campo elettrico dell'impulso incidente nel punto B e con \mathcal{E}_B^- il valore assunto nel medesimo punto dal campo elettrico dell'impulso riflesso:

$$\mathcal{E}_B^- = r\mathcal{E}_B^+ = 80 \cdot (-0.7) = -56 \text{ V/m}.$$

Analogamente:

$$\mathcal{E}_E^- = r\mathcal{E}_E^+ = 45 \cdot (-0.7) = -31.5 \text{ V/m}.$$

Nota l'ampiezza e l'orientamento del campo elettrico si ricava immediatamente quella del campo magnetico. Il verso di propagazione è opposto a quella dell'asse z quindi:

$$\mathcal{H}_B^- = -\frac{\mathcal{E}_B^-}{\eta} = 148\text{mA/m};$$

$$\mathcal{H}_E^- = -\frac{\mathcal{E}_E^-}{\eta} = 83 \text{ mA/m}$$

Gli andamenti temporali del campo elettrico e del campo magnetico in $z = -300\text{m}$ sono riportati in figura 2.9.

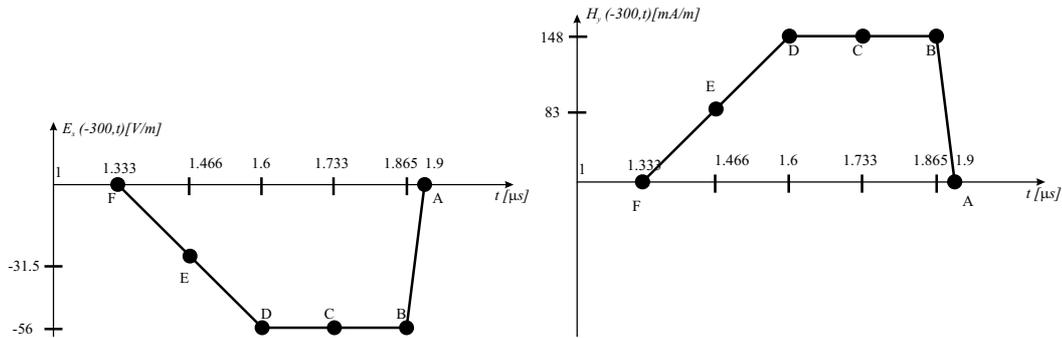


Figura 2.9: Andamento del campo elettrico \mathcal{E}_x e del campo magnetico \mathcal{H}_y in $z = -300\text{m}$.

2.3 Analisi nel dominio della frequenza

Quando il mezzo in cui il campo elettromagnetico si propaga è temporalmente dispersivo, la relazione tra il campo elettrico $\vec{\mathcal{E}}$ ed il vettore spostamento elettrico $\vec{\mathcal{D}}$ è di tipo integrale e la risoluzione delle equazioni di Maxwell nel dominio del tempo diventa proibitiva. In questa situazione, ma anche in molte altre, la trattazione si semplifica enormemente se anziché utilizzate i vettori reali funzioni dello spazio e del tempo, si utilizzano i vettori complessi rappresentativi che sono funzioni dello spazio e della frequenza. In linea di principio, ciò non comporta alcuna limitazione, infatti dall'analisi di Fourier è noto che un qualsiasi segnale temporale può essere rappresentato da una somma integrale di infinite sinusoidi ognuna con una pulsazione differente.

Il procedimento è del tutto identico a quello visto nel paragrafo 2.2 salvo il fatto che si devono considerare le equazioni di Maxwell in regime armonico relative ai vettori complessi rappresentativi \vec{E} , \vec{H} legati ai vettori reali $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{H}}$ dalle seguenti relazioni:

$$\vec{\mathcal{E}}(x, y, z, t) = \text{Re} \{ \vec{E}(x, y, z) e^{j\omega t} \} \tag{2.12}$$

$$\vec{\mathcal{H}}(x, y, z, t) = \text{Re} \{ \vec{H}(x, y, z) e^{j\omega t} \}.$$

Postulando la dipendenza spaziale del campo da una sola coordinata spaziale, ad esempi z , si individuano due soluzioni indipendenti, una caratterizzata dalle componenti (E_x, H_y) e l'altra dalla coppia (E_y, H_x) dove E_x, E_y, H_x, H_y sono quantità complesse. Se l'orientamento dei vettori non coincide con uno degli assi coordinati del sistema di riferimento, il campo può essere scomposto nella somma di due onde, una con componenti (E_x, H_y) e l'altra con componenti (E_y, H_x) . La relazione che sussiste tra $\overline{E}, \overline{H}$ e direzione di propagazione, individuata dal versore \hat{k} , è la stessa vista nel paragrafo 2.2:

$$\overline{H} = \frac{1}{\eta} \hat{k} \times \overline{E}; \quad (2.13)$$

$$\overline{E} = -\eta \hat{k} \times \overline{H}.$$

Le proprietà delle due soluzioni sono le stesse, per questo motivo nel seguito si farà riferimento alla soluzione (E_x, H_y)

L'equazione per E_x è la seguente:

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} - \gamma^2 E_x = 0 \quad (2.14)$$

dove

$$\gamma = \sqrt{-\omega^2 \mu \varepsilon_c} \quad (2.15)$$

e

$$\varepsilon_c = \varepsilon' - j(\varepsilon'' + \frac{\sigma}{\omega});$$

da cui:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon'_r - j(\varepsilon''_r + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}).$$

La parte immaginaria di ε_c è legata alle perdite ed in particolare alle perdite per effetto Joule tramite la conducibilità elettrica σ ed alle perdite legate all'orientamento dei dipoli degli atomi e delle molecole che costituiscono il mezzo tramite ε'' . La *costante di propagazione* γ è in generale una quantità complessa:

$$\gamma = \alpha + j\beta. \quad (2.16)$$

Imponendo l'uguaglianza tra la (2.15) e la (2.16) si ottiene [1]:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\omega \sqrt{\mu \varepsilon'} }{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + R^2} - 1} \\ \beta &= \frac{\omega \sqrt{\mu \varepsilon'} }{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + R^2} + 1} \end{aligned} \quad (2.17)$$

con

$$R = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} + \frac{\sigma}{\omega \varepsilon'}. \quad (2.18)$$

La seconda delle (2.17) costituisce la legge di dispersione dell'onda sinusoidale. Spesso al posto di R si usa $\tan \delta_p$ dove δ_p è detto angolo di perdita [2]:

$$\delta_p = \arctan(R)$$

L'espressione generale della soluzione della (2.14) è la seguente:

$$E_x(z) = Ae^{-\gamma z} + Be^{\gamma z} = Ae^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + Be^{\alpha z} e^{j\beta z}. \quad (2.19)$$

Noto il campo elettrico, il vettore rappresentativo del campo magnetico si ottiene considerando la seguente equazione di Maxwell nel dominio trasformato:

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -j\omega\mu\bar{H}. \quad (2.20)$$

Esplicitando ambo i membri, in virtù del fatto che \bar{E} dipende unicamente da z si ottiene:

$$\frac{dE_x}{dz} = -j\omega\mu H_y;$$

mentre le altre due componenti di \bar{H} sono nulle. Sostituendo la (2.19) segue:

$$H_y(z) = \frac{1}{\eta_c} \left(Ae^{-\alpha z} e^{-j\beta z} - Be^{\alpha z} e^{j\beta z} \right);$$

con

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon' - j(\varepsilon'' + \sigma/\omega)}}. \quad (2.21)$$

Come nel caso dell'analisi nel dominio del tempo, sia per l'onda diretta che per quella riflessa, l'ampiezza del campo magnetico e quella del campo elettrico sono legate attraverso l'impedenza intrinseca del mezzo η_c . A causa delle perdite η_c è ora una quantità complessa, ovvero il campo elettrico e quello magnetico non sono più in fase. Anche le costanti A e B , che dipendono dalle condizioni al contorno, sono in generale complesse. Sostituendo la loro rappresentazione in forma polare:

$$A = |A|e^{j\phi_A} \quad B = |B|e^{j\phi_B} \quad \eta_c = |\eta_c|e^{j\phi_\eta}$$

nell'equazione sopra e svolgendo la parte reale, si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x(z, t) &= |A|e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi_A) + |B|e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \phi_B) \\ \mathcal{H}_y(z, t) &= \frac{|A|}{|\eta_c|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi_A - \phi_\eta) - \frac{|B|}{|\eta_c|} e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \phi_B - \phi_\eta). \end{aligned}$$

La soluzione generale è costituita anche in questo caso da due funzioni che al variare del tempo traslano nello spazio, una nel verso positivo dell'asse z e l'altra nel verso negativo ad una velocità

$$vf = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon'\mu}\sqrt{\sqrt{1+R^2}+1}}, \quad (2.22)$$

con una lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\omega\sqrt{\varepsilon'}\mu\sqrt{\sqrt{1+R^2}+1}}. \quad (2.23)$$

Essendo in regime armonico, la dipendenza temporale di queste funzioni é sempre e comunque di tipo sinusoidale. Le funzioni sinusoidali sono rappresentate nel dominio trasformato da esponenziali complessi. La parte immaginaria dell'esponente coincide con l'argomento della funzione sinusoidale e per questo motivo viene detta fase dell'onda, mentre la parte reale controlla l'ampiezza.

Per analizzare le proprietà di queste soluzioni conviene procedere per gradi considerando il caso di dielettrico ideale, quello di dielettrico reale ed infine quello di buon conduttore. Essendo le considerazioni identiche per l'onda diretta e per quella riflessa, nel seguito si considererà solo la prima.

2.3.1 Mezzo dielettrico ideale

Per definizione un mezzo dielettrico è caratterizzato da una conducibilità $\sigma = 0$. Un dielettrico si dice ideale se sono assenti anche altri fenomeni dissipativi legati al movimento di orientamento dei dipoli degli atomi e molecole del materiale per effetto del campo elettromagnetico stesso; in questo caso $\varepsilon'' = 0$. Grazie alla condizione:

$$\sigma = \varepsilon'' = 0,$$

l'impedenza intrinseca diventa una quantità reale:

$$\eta_c = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}.$$

Inoltre dalle (2.17) segue che:

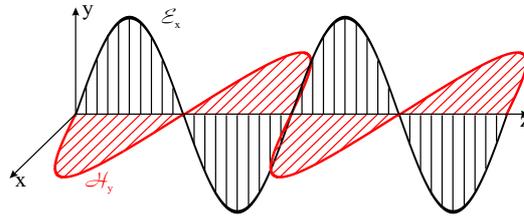
$$\alpha = 0 \quad \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon'}. \quad (2.24)$$

In assenza di perdite, la legge di dispersione di un'onda sinusoidale in un mezzo omogeneo è lineare. Se per semplicità si considera solo l'onda diretta:

$$\begin{aligned} E_x(z) &= Ae^{-j\beta z} \\ H_y(z) &= \frac{A}{\eta}e^{-j\beta z} \end{aligned}$$

e si applicano le (2.12) si ottengono gli andamenti temporali del campo elettrico e magnetico:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x(z, t) &= |A| \cos(\omega t - \beta z + \phi_A) \\ \mathcal{H}_y(z, t) &= \frac{|A|}{\eta} \cos(\omega t - \beta z + \phi_A); \end{aligned} \quad (2.25)$$


 Figura 2.10: Andamento del campo elettrico \mathcal{E}_x e del campo magnetico \mathcal{H}_y .

i cui andamenti, ad un generico istante, sono riportati in figura 2.10. Il campo elettrico ed il campo magnetico sono sempre in fase, ed al variare del tempo le curve traslano nel verso positivo alla velocità di fase:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c_0}{n}.$$

Se il mezzo è non magnetico:

$$v_f = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon'_r}}.$$

Sostituendo nell'espressione generale della lunghezza d'onda (1.4), la seconda delle (2.24):

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = 2\pi \frac{v_f}{\omega} = \frac{v_f}{f}; \quad (2.26)$$

ovvero

$$\lambda f = \frac{c_0}{n}$$

Se con λ_0 si indica la lunghezza d'onda nel vuoto segue inoltre che:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}.$$

Esempio

L'espressione del campo elettrico di un segnale radio per la radio diffusione AM che si propaga in aria è la seguente:

$$\bar{\mathcal{E}}(x, t) = 10 \cos(1.5\pi \cdot 10^6 t + \beta x) \hat{z} \quad \text{V/m.}$$

Determinare:

- la direzione ed il verso di propagazione e la frequenza f ;*
- la costante di fase β e la lunghezza d'onda λ ;*
- l'espressione dei vettori complessi rappresentativi $\bar{\mathcal{E}}(x)$ e $\bar{\mathcal{H}}(x)$;*

(d) l'espressione del vettore campo magnetico $\overline{\mathcal{H}}(x, t)$.

Soluzione

(a) L'onda si propaga in direzione $-x$. Essendo $\omega = 2\pi f = 1.5\pi 10^6$ [rad/s] segue che $f = 750$ [kHz].

(b) Essendo la propagazione in aria, la costante di fase vale

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 1.5\pi 10^6 / 3 \cdot 10^8 [\text{m/s}] = 0.005\pi [\text{rad/m}]$$

e quindi la lunghezza d'onda vale

$$\lambda = 2\pi / \beta = 400 [\text{m}]$$

pari a quella assunta nel vuoto alla stessa frequenza.

(c) Si calcola innanzitutto il vettore rappresentativo del campo elettrico:

$$\overline{E}(x) = A e^{j\beta x} \hat{z} = 10 e^{j0.005\pi x} \hat{z} [\text{V/m}].$$

Sostituendo l'espressione trovata nella (2.13) si ottiene:

$$\begin{aligned} \overline{H}(x) &= \frac{1}{377[\Omega]} (-\hat{i}) \times (10 e^{j0.005\pi x} \hat{z} [\text{V/m}]) \\ &= \frac{10[\text{V/m}]}{377[\Omega]} e^{j0.005\pi x} (-\hat{i} \times \hat{z}) \\ &= \frac{10[\text{V/m}]}{377[\Omega]} e^{j0.005\pi x} \hat{j} \\ &= 26.5 \cdot 10^{-3} e^{j0.005\pi x} \hat{j} [\text{A/m}]. \end{aligned}$$

(d) Sostituendo $\overline{H}(x)$ nella (2.12):

$$\overline{\mathcal{H}}(x, t) = \text{Re} \{ \overline{H} e^{j\omega t} \} = 26.5 \cdot 10^{-3} \cos(1.5\pi \cdot 10^{-6} t + 0.005\pi x) \hat{j} [\text{A/m}].$$

2.3.2 Mezzi con basse perdite

Nei mezzi reali in generale sia σ che ε'' sono non nulli. Tipicamente nei materiali utilizzati per la trasmissione a distanza dei segnali elettromagnetici il loro valore è tale che $\varepsilon''/\varepsilon' \ll 1$

e $\sigma/\omega\varepsilon' \ll 1$. Ciò permette di semplificare le (2.17) in virtù del fatto che se $R \ll 1$ allora $\sqrt{1+R^2} \simeq 1 + \frac{R^2}{2}$ ottenendo:

$$\begin{aligned}\beta &= \omega\sqrt{\mu\varepsilon'} \\ \alpha &= \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}}{2} \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} + \frac{\sigma}{\omega\varepsilon'} \right)\end{aligned}$$

La costante di fase è praticamente identica a quella di un dielettrico ideale, questo fa sì che anche la velocità di fase e la lunghezza d'onda, in un mezzo non magnetico, siano pari a:

$$v_f = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}, \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{f}{c_0\sqrt{\varepsilon_r}};$$

Anche l'impedenza intrinseca può essere assunta con buona approssimazione identica a quella del dielettrico ideale:

$$\eta_c = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}.$$

Al contrario, la costante di attenuazione non può essere supposta ancora nulla. Considerando per semplicità la sola onda diretta:

$$\begin{aligned}E_x(z) &= |A|e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\phi_A} \\ H_y(z) &= \frac{|A|}{\eta} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\phi_A}\end{aligned}$$

le espressioni nel dominio del tempo sono la seguenti:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_x(z, t) &= |A|e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi_A) \\ \mathcal{H}_y(z, t) &= \frac{|A|}{\eta} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi_A)\end{aligned}$$

ed sono riportate in figura 2.11. L'onda presenta un decadimento esponenziale lungo la direzione di propagazione. La parte immaginaria della permittività è cioè responsabile di una attenuazione dell'onda che è tanto più rapida quanto più elevato è α cioè σ o ε'' .

Esempio

Un'onda di frequenza $f = 10\text{GHz}$ si propaga in un cristallo di arseniuro di gallio GaAs, comunemente usato per realizzare dispositivi elettronici per applicazioni in alta frequenza. Alla frequenza in esame per il GaAs si può assumere $\varepsilon_r = 12.9$, $\mu_r = 1$, $R = 5 \cdot 10^{-4}$. Esso quindi si comporta come un mezzo a basse perdite.

La costante di attenuazione e quella di fase valgono rispettivamente:

$$\alpha = \frac{\omega\sqrt{\mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r}}{2} R = 0.188 \text{ m}^{-1};$$

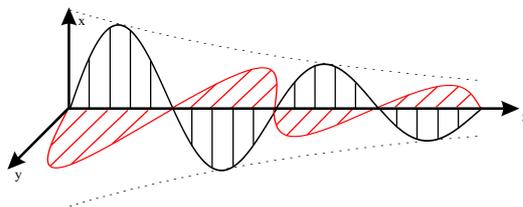


Figura 2.11: Andamento del campo elettrico \mathcal{E}_x e del campo magnetico \mathcal{H}_y . Le curve tratteggiate indicano l'andamento $e^{-\alpha z}$ e $-e^{-\alpha z}$.

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r} = 752 \text{ m}^{-1}.$$

La velocità di fase, l'impedenza intrinseca e la lunghezza d'onda valgono:

$$v_f = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 8.35 \cdot 10^7 \text{ m/s}, \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 105 \Omega, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 8.3 \text{ mm}$$

circa 3.59 volte inferiori ai valori assunti nel vuoto.

2.3.3 Buon conduttore

Se il valore di σ non è trascurabile, il materiale viene detto conduttore. In questo caso, considerando sempre la sola onda diretta, le espressioni delle componenti sono le seguenti:

$$\begin{aligned} E_x(z) &= |A| e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\phi_A} \\ H_y(z) &= \frac{|A|}{|\eta|} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\phi_A} e^{-j\phi_\eta}; \end{aligned}$$

nel dominio del tempo:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x(z, t) &= |A| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi_A) \\ \mathcal{H}_y(z, t) &= \frac{|A|}{|\eta|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi_A - \phi_\eta). \end{aligned}$$

L'impedenza intrinseca complessa causa uno sfasamento tra i due vettori come evidenziato in figura 2.12. È evidente anche l'attenuazione del campo dovuto alle perdite per effetto Joule. Quando poi $\sigma \gg \omega \varepsilon'$ si parla di buon conduttore. Anche in questo caso limite è possibile semplificare le (2.17). Essendo $R \gg 1$ segue che $R^2 + 1 \simeq R^2$ e quindi:

$$\alpha \simeq \beta \simeq \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} = \frac{1}{\delta};$$

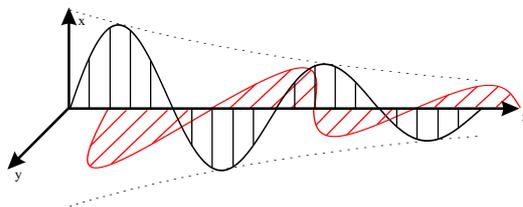


Figura 2.12: Andamento del campo elettrico \mathcal{E}_x e del campo magnetico \mathcal{H}_y . Le curve tratteggiate indicano l'andamento $e^{-\alpha z}$ e $-e^{-\alpha z}$. Lo sfasamento tra il campo elettrico ed il campo magnetico è evidenziato dal fatto che gli zeri sono assunti in punti differenti.

$$\eta_c \simeq \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}} e^{j\pi/4}.$$

Da cui segue:

$$v_f = 2\pi f\delta = \sqrt{\frac{4\pi f}{\mu\sigma}} \quad \lambda = 2\pi\delta = \frac{2\sqrt{\pi}}{f\mu\sigma}.$$

δ ha la dimensione di una distanza e viene chiamato *spessore di penetrazione*:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}. \quad (2.27)$$

Lo spessore di penetrazione da un'idea della capacità del campo elettromagnetico di propagarsi all'interno di un buon conduttore. Osservando infatti le espressioni del campo elettrico e magnetico:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x(z, t) &= |A|e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta + \phi_A) \\ \mathcal{H}_y(z, t) &= \frac{|A|}{|\eta_c|} e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta + \phi_A - \pi/4). \end{aligned}$$

emerge che lo spessore di penetrazione è la distanza alla quale il campo elettrico ed il campo magnetico si riducono di un fattore $1/e$. In figure 2.13 è riportato l'andamento del campo elettrico in funzione di z . Come si vede l'andamento del campo è ben approssimato dalla funzione $e^{-z/\delta}$. Si noti inoltre che in un buon conduttore il campo elettrico ed il campo magnetico sono sfasati di 45° .

Un aspetto importante nella propagazione del campo elettromagnetico in un buon conduttore è che lo spessore di penetrazione è inversamente proporzionale alla frequenza. Se in prima approssimazione si trascura la dipendenza della conducibilità dalla frequenza, un campo elettromagnetico è in grado di penetrare in un mezzo conduttore tanto più quanto più bassa è la sua frequenza.

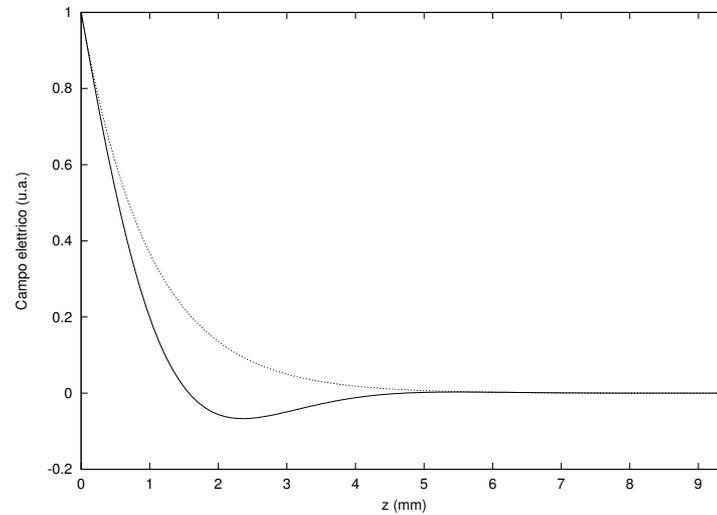


Figura 2.13: Andamento del campo elettrico all'interno di un buon conduttore. La linea tratteggiata indica l'andamento $e^{-z/\delta}$.

Esempio

Per frequenze comprese nell'intervallo $[10kHz, 10MHz]$ la permittività dielettrica relativa e la conducibilità dell'acqua marina possono essere ritenute costanti e pari a $\epsilon_r = 81$, $\sigma = 4 S/m$. Trascurando le perdite di natura dielettrica $\epsilon'' = 0$, l'espressione di R diventa:

$$R = \frac{\sigma}{\omega\epsilon'} = \frac{4[S/m]}{2\pi f 8.85 \cdot 10^{-12}[F/m]81} = \frac{888 \cdot 10^6}{f} [s^{-1}] = \frac{888 \cdot 10^6}{f[MHz]}.$$

Nell'intervallo di frequenza considerato, essendo

$$88.8 < R < 8.88 \cdot 10^4$$

l'acqua marina può essere ritenuta un buon conduttore. In base alla (2.27), lo spessore di penetrazione a $10kHz$, $100kHz$, $1MHz$ e $10MHz$ vale rispettivamente:

$$\begin{aligned} \delta_{10kHz} &= \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot 10 \cdot 10^3 [s^{-1}] 4\pi \cdot 10^{-7} [H/m] 4 [S/m]}} = 2.52 [m]; \\ \delta_{100kHz} &= 79 [cm]; \\ \delta_{1MHz} &= 25 [cm]; \\ \delta_{10MHz} &= 7.9 [cm]. \end{aligned}$$

Questi valori mostrano come la comunicazione sottomarina sia estremamente difficoltosa e sia possibile solo a frequenze estremamente basse, inferiori ai 10kHz.

La condizione diviene meno stringente se si considera la propagazione in acqua dolce in cui la conducibilità vale $\sigma = 4 \cdot 10^{-3} [S/m]$. A 10MHz

$$R = 8.88 \cdot 10^{-2} \ll 1,$$

quindi l'acqua dolce è un buon dielettrico. In questo caso la costante di attenuazione vale:

$$\alpha = \frac{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon'} R}{2} = \frac{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon'} \sigma}{2\omega\epsilon'} = \frac{\sigma \eta_0}{2\sqrt{\epsilon'}} = \frac{4 \cdot 10^{-3} [S/m] \cdot 377 [\Omega]}{2 \cdot 9} = 83.7 \cdot 10^{-3} [m^{-1}]$$

Se si valuta lo spessore di penetrazione come l'inverso della costante di attenuazione, si ottiene:

$$\delta_{10MHz} = \frac{1}{\alpha} = 11.9 \text{ m.}$$

che differisce poco dal valore 12.1 ottenuto utilizzando la prima delle (2.17). Per frequenze inferiori, R diventa confrontabile con l'unità ed è quindi necessario utilizzare la prima delle (2.17) ottenendo:

$$\begin{aligned} \delta_{10kHz} &= 80.2 \text{ m;} \\ \delta_{100kHz} &= 26.7 \text{ m;} \\ \delta_{1MHz} &= 13.0 \text{ m.} \end{aligned}$$

Tabella riassuntiva

$R = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} + \frac{\sigma}{\omega\epsilon'}$				
	Generale	Dielettrico ideale $R = 0$	Basse perdite $R \ll 1$	Buon conduttore $R \gg 1$
Cost. di att.	$\alpha = \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon'}}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1+R^2}-1}$	$\alpha = 0$	$\alpha = \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon'}}{2} R$	$\alpha = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\pi f \mu \sigma}$
Cost. di fase	$\beta = \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon'}}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1+R^2}+1}$	$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon'}$	$\beta = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\pi f \mu \sigma}$
Lung. d'onda	$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$	$\lambda = \frac{1}{f\sqrt{\mu\epsilon}}$	$\lambda = \frac{1}{f\sqrt{\mu\epsilon'}}$	$\lambda = 2\pi\delta = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{f\mu\sigma}}$
Imp. intrinseca	$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon' - j(\epsilon'' + \sigma/\omega)}}$	$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}$	$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}} e^{j\pi/4}$

2.3.4 Polarizzazione

In regime armonico il vettore campo elettrico $\bar{\mathcal{E}}$ e magnetico $\bar{\mathcal{H}}$ variano periodicamente nel tempo con periodo $T = 2\pi/\omega$. In particolare, la traiettoria percorsa dal vertice del vettore $\bar{\mathcal{E}}$ definisce la *polarizzazione* del campo elettromagnetico. Le considerazioni che verranno fatte nel seguito fanno riferimento al caso di propagazione della sola onda diretta in un mezzo privo di perdite, tuttavia la loro validità si mantiene anche al caso di propagazione di più onde in un mezzo con perdite.

Si supponga inizialmente che si propaghi una sola onda con componenti (E_x, H_y) :

$$\bar{\mathcal{E}}(z, t) = |A| \cos(\omega t - \beta z + \phi_A) \hat{i}.$$

Al variare del tempo, fissato un punto dello spazio, ad esempio $z = 0$, il vettore mantiene costante la direzione, \hat{i} , e varia l'ampiezza con legge sinusoidale: $|A| \cos(\omega t + \phi_A)$. La figura 2.14 mostra l'evoluzione temporale di $\bar{\mathcal{E}}$ nell'ipotesi che $\phi_A = 0$. Il vertice si muove lungo un segmento di lunghezza $2|A|$. La polarizzazione del campo è detta *lineare*.

Si consideri ora la somma di un'onda (E_x, H_y) e di una (E_y, H_x) di differente ampiezza, ma stessa fase iniziale, ovvero con $\phi_A = \phi_B$:

$$\bar{\mathcal{E}}(z, t) = |A| \cos(\omega t - \beta z + \phi_A) \hat{i} + |B| \cos(\omega t - \beta z + \phi_A) \hat{j}.$$

L'andamento del campo elettrico complessivo $\bar{\mathcal{E}}$ è riportato in figura 2.15. Il segmento ha una lunghezza $2\sqrt{|A|^2 + |B|^2}$ e forma un angolo con l'asse x :

$$\psi = \arctan\left(\frac{|B| \cos(\omega t - \beta z + \phi_A)}{|A| \cos(\omega t - \beta z + \phi_A)}\right) = \arctan\left(\frac{|B|}{|A|}\right)$$

costante nel tempo e nello spazio. La polarizzazione è ancora *lineare*. Ovviamente, in virtù del fatto che uno sfasamento di π corrisponde ad un semplice cambiamento di segno, anche quando $\phi_B - \phi_A = \pm\pi$ la polarizzazione è lineare.

Se le due onde e quindi le due componenti del vettore $\bar{\mathcal{E}}$, sono invece sfasate di $\pm\pi/2$, ovvero sono in quadratura ed hanno la stessa ampiezza:

$$\phi_B = \phi_A \pm \pi/2 \quad |B| = |A|,$$

la polarizzazione è *circolare*. Infatti:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}(z, t) &= |A| \cos(\omega t - \beta z + \phi_A) \hat{i} + |B| \cos(\omega t - \beta z + \phi_A \pm \pi) \hat{j} = \\ &= |A| (\cos(\omega t - \beta z + \phi_A) \hat{i} \mp \sin(\omega t - \beta z + \phi_A) \hat{j}) \end{aligned}$$

il cui modulo vale:

$$|\bar{\mathcal{E}}(z, t)| = |A| \sqrt{\cos^2(\omega t - \beta z + \phi_A) + \sin^2(\omega t - \beta z + \phi_A)} = |A|$$

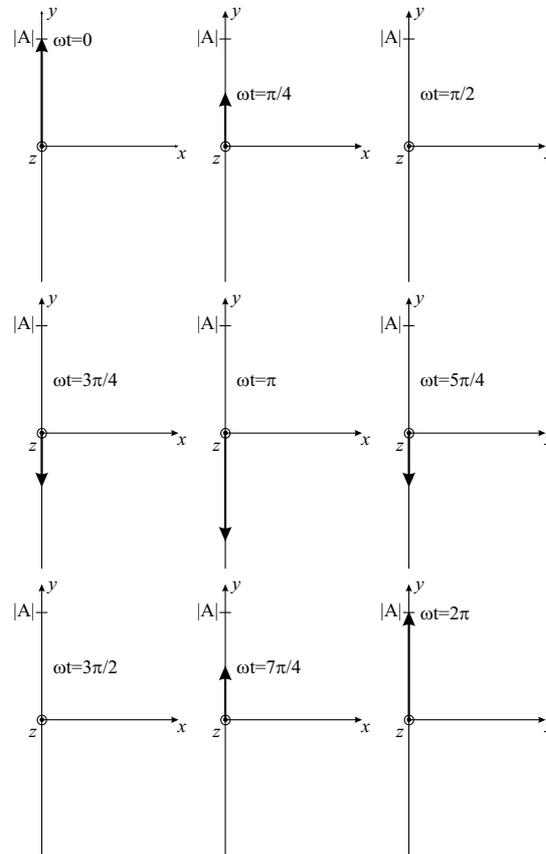
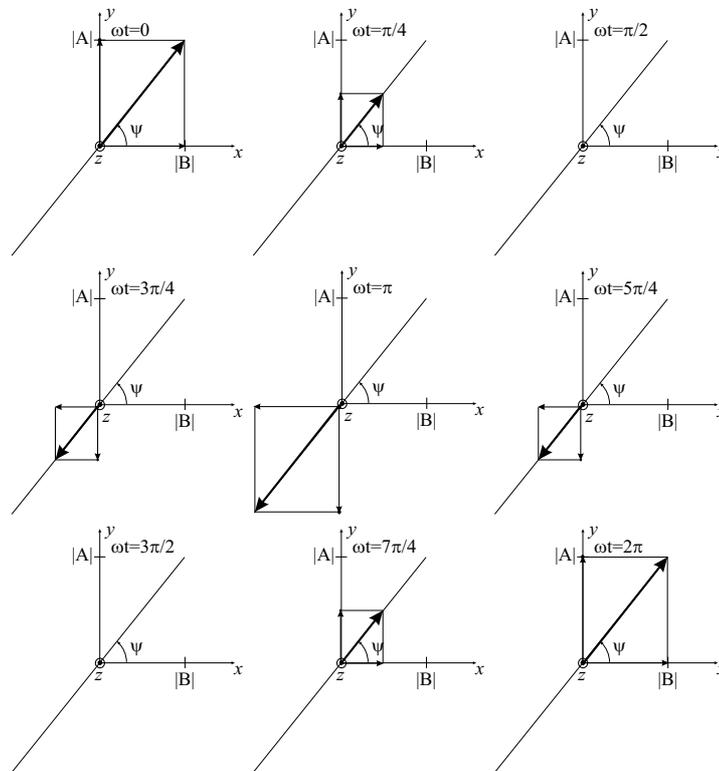


Figura 2.14: Andamento temporale del campo elettrico nel punto $z = 0$.

e l'angolo rispetto all'asse x :

$$\psi(z, t) = \arctan\left(\mp \frac{\sin(\omega t - \beta z + \phi_A)}{\cos(\omega t - \beta z + \phi_A)}\right) = \mp(\omega t - \beta z + \phi_A).$$

Il vettore ruota con velocità angolare $\mp\omega$ e modulo costante come illustrato in figura 2.16 relativa al caso $\phi_A = 0$ e $\phi_B = \pi/2$. In particolare se $\phi_B - \phi_A = \pi/2$ la polarizzazione è *circolare sinistrorsa* ovvero osservando il vettore dal semispazio $z > 0$ il vettore campo elettrico ruota in senso orario; se $\phi_B - \phi_A = -\pi/2$ la polarizzazione è *circolare destrorsa* ovvero osservando il vettore dal semispazio $z > 0$ il vettore campo elettrico ruota in senso antiorario. Le due possibili polarizzazioni circolari sono riportate in figura 2.17. Si osservi infine la figura 2.18 relativa all'andamento spaziale di \vec{E} ad un'istante fissato e $\phi_B = -\pi/2$. Muovendosi lungo la direzione di propagazione il vettore campo elettrico ruota con una velocità $-\beta$ descrivendo un moto elicoidale.


 Figura 2.15: Andamento temporale del campo elettrico nel punto $z = 0$.

Più in generale se $|A| \neq |B|$ e $\phi_B - \phi_A \neq 0, \pm\pi/2$ la polarizzazione è *ellittica*; di tipo destrorso se $\sin(\phi_B - \phi_A) > 0$, di tipo sinistrorso se $\sin(\phi_B - \phi_A) < 0$. È facile dimostrare che le polarizzazioni lineari e circolari non sono altro che casi particolari della polarizzazione ellittica. Di seguito viene riportata una tabella riassuntiva.

Tabella riassuntiva		
Ampiezze	Sfasamento	Polarizzazione
$ A = B $	$\phi_B - \phi_A = \pi/2$	Circolare sinistrorsa
$ A = B $	$\phi_B - \phi_A = -\pi/2$	Circolare destrorsa
$ A \neq B $	$\phi_B - \phi_A = 0$	Lineare I-III quadrante
$ A \neq B $	$\phi_B - \phi_A = \pi$	Lineare II-IV quadrante
$ A \neq B $	$\sin(\phi_B - \phi_A) > 0$	Ellittica sinistrorsa
$ A \neq B $	$\sin(\phi_B - \phi_A) < 0$	Ellittica destrorsa

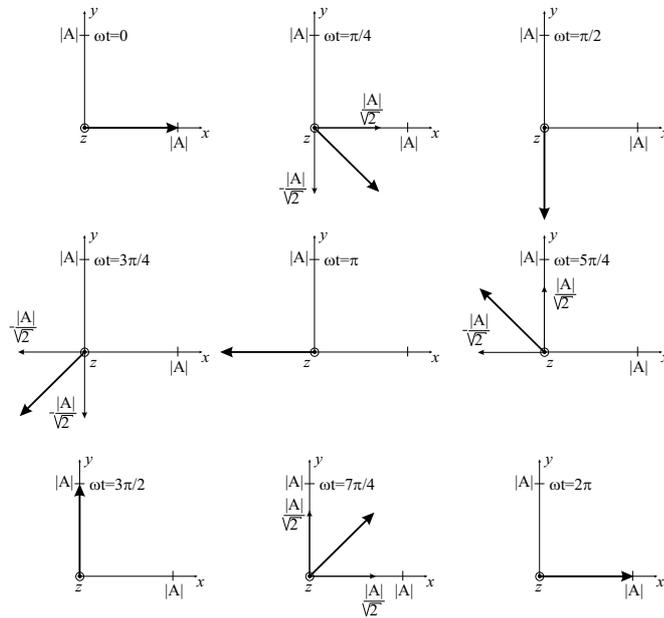


Figura 2.16: Andamento temporale del campo elettrico nel punto $z = 0$ nel caso di polarizzazione circolare con $\phi_A = 0$ e $\phi_B = \pi/2$.

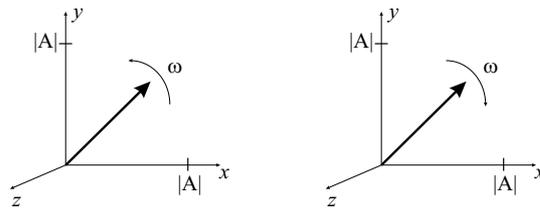


Figura 2.17: Sinistra: polarizzazione circolare destrorsa. Destra: polarizzazione circolare sinistrorsa

Esempio

Rappresentare graficamente il vettore $\vec{E}(t, z) = 10 \sin(\omega t - \beta z)\hat{i} + 10 \cos(\omega t - \beta z)\hat{j}$ nel punto $z = 0$ e negli istanti $t_1 = 125ns$, $t_2 = 250ns$, $t_3 = 375ns$, $t_4 = 500ns$ assunto una frequenza $f = 1MHz$.

Soluzione

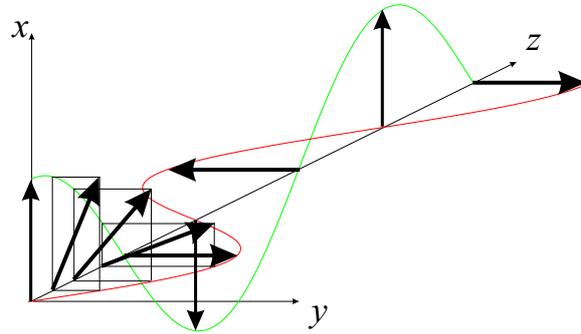


Figura 2.18: Andamento spaziale del campo elettrico nell'istante $t = 0$ nel caso di polarizzazione circolare con $\phi_A = 0$ e $\phi_B = -\pi/2$.

Essendo $\sin(\alpha) = \cos(\alpha - \pi/2)$ il campo elettrico si può scrivere nella forma:

$$\vec{E}(t, z) = 10 \cos(\omega t - \beta z - \pi/2) \hat{i} + 10 \cos(\omega t - \beta z) \hat{j}.$$

La propagazione avviene nel verso positivo dell'asse z ; inoltre $\phi_B - \phi_A = \pi/2$, mentre $|A| = |B| = 10$. La polarizzazione è circolare sinistrorsa. Durante il moto il modulo del vettore si mantiene costante a $\sqrt{|A|^2 + |B|^2} = 10$ e forma un angolo con l'asse x pari a:

$$\psi = \arctan\left(\frac{10 \cos(\omega t)}{10 \sin(\omega t)}\right) = \arctan(\cot(\omega t)) = \pi/2 - \omega t$$

Inoltre essendo

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10^6 \text{ rad/s}$$

segue che:

$$\psi(0, t_0) = \pi/2 - \omega t_0 = \pi/2;$$

$$\psi(0, t_1) = \pi/2 - \omega t_1 = \pi/2 - 125 \cdot 10^9 \text{ s} \cdot 2\pi \cdot 10^6 \text{ rad/s} = \pi/2 - \pi/4 \text{ rad} = \pi/4 \text{ rad};$$

$$\psi(0, t_2) = \pi/2 - \omega t_2 = \pi/2 - 250 \cdot 10^9 \text{ s} \cdot 2\pi \cdot 10^6 \text{ rad/s} = \pi/2 - \pi/2 \text{ rad} = 0 \text{ rad};$$

$$\psi(0, t_3) = \pi/2 - \omega t_3 = \pi/2 - 375 \cdot 10^9 \text{ s} \cdot 2\pi \cdot 10^6 \text{ rad/s} = \pi/2 - 3\pi/4 \text{ rad} = -\pi/4 \text{ rad};$$

$$\psi(0, t_4) = \pi/2 - \omega t_4 = \pi/2 - 500 \cdot 10^9 \text{ s} \cdot 2\pi \cdot 10^6 \text{ rad/s} = \pi/2 - \pi \text{ rad} = -\pi/2 \text{ rad}.$$

l'andamento è quello riportato in figura 2.19.

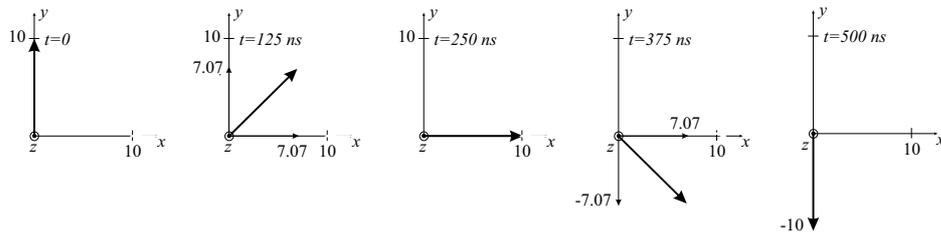


Figura 2.19:

2.3.5 Esercizi risolti

Esercizio

Un'onda si propaga in un mezzo avente impedenza intrinseca $\eta = 100 \Omega$. Il vettore complesso rappresentativo del campo magnetico ha la seguente espressione:

$$\overline{H}(x) = (10\hat{j} + 20\hat{z})e^{-j4x} \text{ mA/m.}$$

Si calcoli il vettore complesso rappresentativo del campo elettrico, la direzione di propagazione e la polarizzazione del campo.

Soluzione

Essendo $\overline{H} = \frac{1}{\eta} \hat{k} \times \overline{E}$ segue che:

$$\overline{E} = -\eta \hat{k} \times \overline{H}. \tag{2.28}$$

L'esponentiale immaginario nell'espressione di \overline{H} indica che l'onda si propaga nel verso positivo dell'asse x , quindi $\hat{k} = \hat{i}$. Sostituendo questo e l'espressione di \overline{H} nella (2.28) e ricordando che $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{z}$ e $\hat{i} \times \hat{z} = -\hat{j}$ si ottiene:

$$\overline{E}(x) = -(\hat{z} - 2\hat{j})e^{-j4x} \text{ V/m.}$$

Le due componenti del campo elettrico sono sfasate di π . La polarizzazione è quindi di tipo lineare ed il vettore oscilla nel II e IV quadrante formando un angolo con l'asse y pari a:

$$\psi = \arctan \frac{-1}{2} = -0.463 \text{ rad} = -26^\circ.$$

Esercizio

Si consideri un'onda sinusoidale che si propaga nel verso positivo di z in un mezzo non magnetico avente un vettore campo elettrico orientato lungo l'asse y di modulo 60V/m . Se la lunghezza d'onda è di 20cm e la velocità di propagazione 10^8m/s , determinare:

- (a) la frequenza dell'onda e la permittività relativa del mezzo;
 (b) l'espressione nel dominio del tempo del campo elettrico e di quello magnetico.

Soluzione

(a) Essendo $\lambda f = v$ segue che

$$f = v/\lambda = 10^8/0.2 = 500 \text{ MHz}.$$

In un mezzo privo di perdite il rapporto tra la velocità di propagazione nel vuoto e quella nel mezzo è uguale all'indice di rifrazione:

$$n = c_0/c = 3 \cdot 10^8/10^8 = 3.$$

Se poi il mezzo è anche non magnetico: $\mu = \mu_0$ e quindi $\epsilon_r = n^2$ da cui

$$\epsilon_r = 9$$

(b) Essendo presente solo l'onda diretta, l'ampiezza del campo magnetico è legata a quello del campo elettrico attraverso l'impedenza intrinseca del mezzo, che in questo caso vale:

$$\eta = \frac{\eta_0}{n} = 377/3\Omega = 126\Omega.$$

Per quanto riguarda la costante di fase, $\beta = 2\pi/\lambda = 2\pi/0.2 \text{ rad/m} = 10\pi \text{ rad/m}$. Le espressioni del campo elettrico e del campo magnetico nel dominio del tempo sono le seguenti:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{E}}(z, t) &= 60 \cos(10^9\pi t - 10\pi z)\hat{j} \text{ V/m} \\ \bar{\mathcal{H}}(z, t) &= -0.477 \cos(10^9\pi t - 10\pi z)\hat{i} \text{ A/m}.\end{aligned}$$

Esercizio

Il campo elettrico di un'onda in banda VLF che si propaga in profondità nell'oceano è dato da:

$$\mathcal{E}_x(z, t) = E_0 e^{-\alpha z} \cos(6\pi \cdot 10^3 t - \beta z) \text{ [V/m]};$$

dove E_0 è l'ampiezza del campo elettrico in $z = 0^+$ cioè immediatamente sotto la superficie dell'acqua posta in $z = 0$. Se la frequenza del campo elettromagnetico è $f = 3\text{kHz}$, trovare:

- (a) la costante di attenuazione α e la costante di fase β ;
- (b) la lunghezza d'onda λ , la velocità dell'onda v , lo spessore di penetrazione δ e l'impedenza intrinseca η_c ; si confronti i valori trovati con in quelli assunti in aria;
- (c) l'espressione del campo magnetico $\mathcal{H}_y(z, t)$ e dei fasori $E_x(z)$ e $H_y(z)$.
- (d) Se un sottomarino posto a 100[m] di profondità ha un'antenna in grado di captare onde elettromagnetiche aventi un campo elettrico maggiore o uguale a $1\text{[}\mu\text{V/m]}$, quale deve essere il valore minimo dell'ampiezza del campo elettrico ed del campo magnetico in $z = 0^+$ affinché la comunicazione sia possibile?

Per l'acqua marina si assuma: $\epsilon'_r = 81$ e $\sigma = 4\text{[S/m]}$.

Soluzione

(a) A $\omega = 2\pi f = 18.84 \cdot 10^3 \text{ [rad/s]}$ il coefficiente R vale:

$$R = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0 \epsilon'_r} = \frac{4 \text{ [S/m]}}{18.84 \cdot 10^3 \text{ [rad/s]} \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ [F/m]} \cdot 81} = 2.96 \cdot 10^5 \gg 1.$$

quindi alla frequenza di 3kHz l'acqua marina è un buon conduttore. In questo caso è possibile usare le espressioni approssimate delle (2.17), ottenendo:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} = \sqrt{\frac{18.84 \cdot 10^3 \text{ [rad/s]} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ [H/m]} \cdot 4 \text{ [S/m]}}{2}} = 0.218 \text{ [m}^{-1}\text{]}.$$

(b) Nota la costante di fase si ricava immediatamente la lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 28.9 \text{ [m]}$$

e da essa la velocità di propagazione:

$$v = f\lambda = 3 \cdot 10^3 \text{ [s}^{-1}\text{]} \cdot 28.8 \text{ [m]} = 8.66 \cdot 10^4 \text{ [m/s]}.$$

Nell'aria, alla frequenza di 3kHz , la lunghezza d'onda vale:

$$\lambda = v/f = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ [m/s]}}{3 \cdot 10^3 \text{ [s}^{-1}\text{]}} = 10^5 \text{ [m]} = 100 \text{ [km]}.$$

Rispetto all'aria, a 3kHz , nell'oceano la velocità e la lunghezza d'onda sono circa 3464 volte più piccole.

Lo spessore di penetrazione vale

$$\delta = 1/\alpha = 4.59 \text{ [m]},$$

mentre l'impedenza intrinseca

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}} e^{j\pi/4} = 7.7 \cdot 10^{-2} e^{j\pi/4} [\Omega].$$

Il modulo dell'impedenza intrinseca è circa 4900 volte quello dell'aria (377 $[\Omega]$).

(c) Essendo nota l'espressione del campo elettrico e l'impedenza intrinseca del mezzo, si ricava immediatamente l'espressione del campo magnetico:

$$\mathcal{H}_y = \frac{E_0}{|\eta_c|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \pi/4) = 13E_0 e^{-0.218z} \cos(18.84 \cdot 10^3 t - 0.218z - \pi/4) [A/m]$$

Per quel che riguarda i fasori:

$$E_x(z) = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} = E_0 e^{-z/4.59} e^{-j0.218z} [V/m];$$

$$H_y(z) = \frac{E_0}{|\eta_c|} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\phi_\eta} = 13E_0 e^{-z/4.59} e^{-j0.218z} e^{-j\pi/4} [A/m];$$

(d) A $z = z_1 = 100 [m]$ l'ampiezza del campo deve essere:

$$E_0 e^{-\alpha z_1} \geq 1\mu[V/m]$$

quindi

$$E_0 \geq \frac{1\mu V/m}{e^{-0.218 \cdot 100}} = 2.84[kV/m].$$

Il corrispondente valore del campo magnetico, vale

$$H_0 = 13E_0 = 36.9[kA/m].$$

Ricordando che il flusso di potenza attiva è pari alla parte reale del vettore di Poynting \bar{S} si ottiene:

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \Re\left(\frac{1}{2}\bar{E} \times \bar{H}^*\right) \\ &= \Re\left(\frac{1}{2}E_x(z)\hat{i} \times H_y^*(z)\hat{j}\right) \\ &= \Re\left(\frac{1}{2}E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} H_0 e^{-\alpha z} e^{j\beta z} e^{j\frac{\pi}{4}} \hat{i} \times \hat{j}\right) \\ &= \frac{1}{2}E_0 H_0 e^{-2\alpha z} \Re\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right) \hat{z} \\ &= \frac{1}{2}E_0 H_0 e^{-2\alpha z} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \hat{z}. \end{aligned}$$

In $z = 0^+$ la densità di potenza attiva è pari a:

$$|\bar{S}(0)| = \frac{1}{2}E_0 H_0 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}2.84 \cdot 10^3 [V/m] 36.9 \cdot 10^3 [A/m] \frac{1}{\sqrt{2}} = 37[MW/m^2]$$

che mostra chiaramente la difficoltà di realizzare comunicazioni sottomarine.

Esercizio

Si consideri un'onda sinusoidale, di frequenza $f = 1 \text{ MHz}$, che viaggia nel verso positivo dell'asse z , con il campo elettrico diretto lungo l'asse x . Il valore di picco è di $1.2\pi \text{ mV/m}$ assunto a $t = 0$ in $z = 50 \text{ m}$. Ricavare l'espressione di $\bar{\mathcal{E}}(z, t)$ e di $\bar{\mathcal{H}}(z, t)$ nel caso di propagazione in aria. Infine disegnare l'andamento in funzione di z a $t = 0$ e l'andamento in funzione di t in $z = 0$.

Svolgimento

Essendo l'aria un dielettrico, le espressioni generali di $\mathcal{E}(z, t)$ e di $\mathcal{H}(z, t)$ sono date dalle (2.25). Si deve quindi determinare la costante di fase β , la pulsazione ω , la fase iniziale ϕ_A e l'impedenza intrinseca del mezzo.

Nota la frequenza si ricava immediatamente la pulsazione:

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 10^6 \pi \text{ [rad/s]}.$$

Essendo $v_f = \omega/\beta$ ed assumendo al solito per l'aria $\epsilon_r \simeq 1$ e $\mu_r = 1$ si ricava la costante di propagazione:

$$\beta = \frac{\omega}{v_f} = \frac{2 \cdot 10^6 \pi}{3 \cdot 10^8} = 2/3 \cdot 10^{-2} \pi \text{ [m}^{-1}\text{]}.$$

In base a quanto calcolato ed alla prima delle (2.25), nel punto $z = 50$ e $t = 0$ il campo elettrico vale:

$$\mathcal{E}(50, 0) = 1.2\pi \cos(2/3 \cdot 10^{-3} \pi \cdot 50 + \phi_A) = 1.2\pi \text{ [mV/m]},$$

quindi ϕ_A deve essere tale che $\cos(-2/3 \cdot 10^{-2} \pi \cdot 50 + \phi_A) = 1$ e quindi $-2/3 \cdot 10^{-2} \pi \cdot 50 + \phi_A = 0$ da cui

$$\arg(A) = \frac{\pi}{3}.$$

In base alla (2.6), essendo il campo elettrico diretto lungo y e il verso di propagazione lungo z ed essendo $\hat{z} \times \hat{j} = -\hat{i}$, il campo magnetico è diretto in direzione opposta all'asse x . Essendo presente la sola onda diretta, l'ampiezza del campo magnetico si ottiene dividendo quella del campo elettrico per l'impedenza intrinseca del mezzo, che nel caso dell'aria vale

$$\eta = 377 \Omega.$$

Le espressioni di $\bar{\mathcal{E}}$ e $\bar{\mathcal{H}}$ sono le seguenti:

$$\bar{\mathcal{E}}(z, t) = 1.2\pi \cos(2 \cdot 10^6 \pi t - \frac{2}{3} \cdot 10^{-2} \pi z + \frac{\pi}{3}) \hat{j} \text{ mV/m};$$

$$\bar{\mathcal{H}}(z, t) = -3.18\pi \cos(2 \cdot 10^6 \pi t - \frac{2}{3} \cdot 10^{-2} \pi z + \frac{\pi}{3}) \hat{i} \text{ } \mu\text{A/V}.$$

Per disegnare l'andamento spaziale del campo elettrico conviene prima calcolare la lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}} = 300 \text{ m};$$

il valore dal campo elettrico in $z = 0$:

$$\mathcal{E} = 1.2\pi \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.6\pi \text{ mV/m};$$

ed il valore z_1 in cui la sinusoidale assume il primo massimo:

$$\cos\left(-\frac{2}{3}10^{-2}\pi z_1 + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \implies -\frac{2}{3}10^{-2}\pi z_1 + \frac{\pi}{3} = 0 \implies z_1 = 50 \text{ m}.$$

L'andamento è riportato nella figura 2.20.

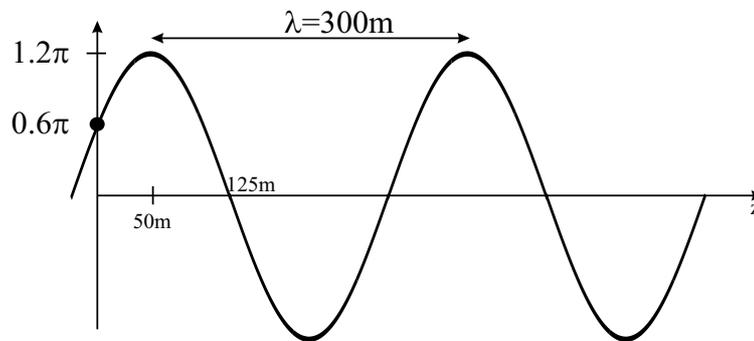


Figura 2.20: Andamento spaziale del campo elettrico all'istante $t = 0$.

L'onda si propaga nel verso positivo dell'asse z , quindi l'andamento temporale in $z = 0$ si ricava semplicemente ribaltando la curva di figura 2.20 rispetto all'origine e riportando sull'asse delle ascisse il tempo al posto dello spazio. A tal fine, sempre dalla figura 2.20, si osserva che in $z = 0$ all'istante $t = 0$ il campo elettrico vale $\mathcal{E}(0,0) = 0.6\pi \text{ mV/m}$. Il primo zero si ha quando

$$2 \cdot 10^6 \pi t_1 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

ovvero $t_1 = 83.\bar{3}$. Il minimo viene assunto quando

$$2 \cdot 10^6 \pi t_2 + \frac{\pi}{3} = \pi$$

ovvero $t_2 = 0.\bar{3} \mu\text{s}$. Il medesimo valore verrà assunto dopo T , mentre in valore massimo dopo $T/2$, dove $T = 1/f = 1 \mu\text{s}$. In questo modo si determina la scala dell'asse temporale. L'andamento temporale è riportato in figure 2.21.

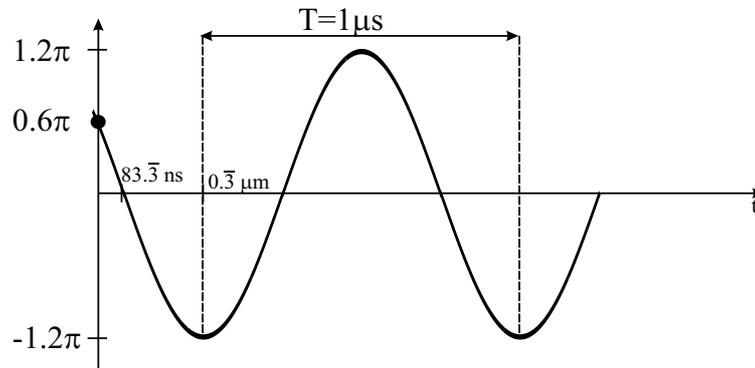


Figura 2.21: Andamento temporale del campo elettrico nel punto $z = 0$.

Esercizio

Si valuti se alla frequenza $f = 10 \text{ kHz}$, tipica delle trasmissioni in banda VLF, i seguenti materiali:

- terreno secco $\epsilon_r = 3 \quad \sigma = 10^{-4} \text{ S/m};$
- terreno umido $\epsilon_r = 10 \quad \sigma = 10^{-2} \text{ S/m};$
- acqua marina $\epsilon_r = 81 \quad \sigma = 4 \text{ S/m};$

si comportano da buoni conduttori. Si calcoli inoltre la distanza oltre la quale il campo, penetrando nel materiale, si riduce di $1/e$ rispetto al valore assunto in corrispondenza della superficie.

Determinare infine la frequenza massima oltre la quale almeno uno dei tre materiali cessa di essere un buon conduttore.

Soluzione

Per poter valutare se un materiale soddisfa la condizione di buon conduttore, si deve calcolare il coefficiente R . In base alla (2.18):

$$R = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} = \begin{cases} \frac{10^{-4}}{2\pi \cdot 10^4 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 3} = 59.9 & \text{terreno secco} \\ \frac{10^{-2}}{2\pi \cdot 10^4 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 10} = 1.8 \cdot 10^3 & \text{terreno umido} \\ \frac{4}{2\pi \cdot 10^4 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 81} = 8.8 \cdot 10^4 & \text{acqua marina} \end{cases}$$

La condizione di buon conduttore è soddisfatta da tutti i materiali, quindi la distanza alla quale il campo si riduce di un fattore $1/e$ è data dallo spessore di penetrazione δ :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi 10^4 4\pi 10^{-7} 10^{-4}}} = 500 \text{ m} & \text{terreno secco} \\ \frac{1}{\sqrt{\pi 10^4 4\pi 10^{-7} 10^{-2}}} = 50 \text{ m} & \text{terreno umido} \\ \frac{1}{\sqrt{\pi 10^4 4\pi 10^{-7} 4}} = 2.5 \text{ m} & \text{acqua marina} \end{cases}$$

Se si confrontano questi valori con la lunghezza d'onda assunta nello spazio vuoto alla frequenza in esame:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^4} = 30 \text{ Km},$$

in tutti i casi

$$\delta \ll \lambda.$$

In banda VLF, la superficie terrestre si comporta da buon conduttore, sia nelle regioni oceaniche, che nelle regioni continentali. A qualche chilometro di altezza dalla superficie terrestre, la terra è circondata da uno strato di gas ionizzati detto inosfera. La inosfera si comporta da buon conduttore fino a frequenza prossime a 1MHz. Quindi, in banda VLF, esistono due strati di materiale conduttore separati da un dielettrico costituito dalla troposfera. Questo dà luogo ad un effetto guidante delle onde elettromagnetiche che permette la trasmissione di onde radio ben oltre la linea dell'orizzonte. La frequenza massima, oltre

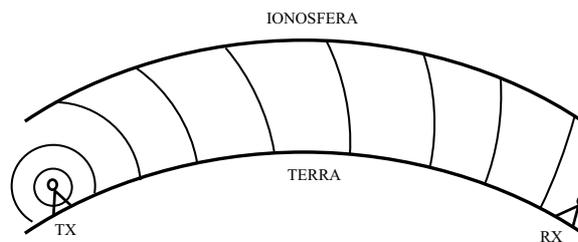


Figura 2.22: Esempio di trasmissione basata sul guidaggio della superficie terrestre e della ionosfera.

la quale questa proprietà viene meno è quella per cui il terreno secco, che è il caso più sfavorevole, cessa di soddisfare la condizione $R \gg 1$. Se si fissa come limite

$$R \geq 10$$

dopo alcuni passaggi si ottiene:

$$f \leq \frac{\sigma}{20\pi\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{10^{-4}}{20\pi \cdot 8.8510^{-12}3} = 60kHz.$$

Questo semplice calcolo permette di capire perchè i sistemi di radio navigazione come il sistema OMEGA ed i radio fari come il sistema LORAN C trasmettono in banda VLF e LF. La frequenza limite oltre la quale il terreno umido cessa di essere un buon conduttore si calcola in modo del tutto identico e vale

$$f_{lim} = 1.8 MHz.$$

Le stazioni radio che trasmettono in modulazione di ampiezza AM usano portanti che non superano i 1650 kHz proprio per sfruttare l'effetto guidante prodotto dalla superficie terrestre e dalla ionosfera e coprire vaste aree geografiche con un'unica stazione trasmittente.
