Esercitazione 1

Francesca Apollonio

Dipartimento Ingegneria Elettronica

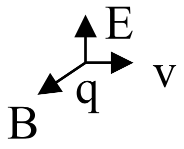
E-mail: apollonio@die.uniroma1.it

Concetto di ‘campo’

Campo:
Regione dello spazio in cui è definita una grandezza fisica variabile in funzione dei punti della regione.

per estensione:
un campo è la grandezza fisica stessa il cui valore dipende dai punti di una certa regione dello spazio in cui viene considerata.

Il campo elettromagnetico
è la grandezza fisica, generalmente funzione dello spazio e del tempo, in grado di descrivere quantitativamente le interazioni collegate alle **cariche elettriche** in quiete o in moto



$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$ Forza di Lorentz

apollonio@die.uniroma1.it

Rappresentazione di un ‘campo’

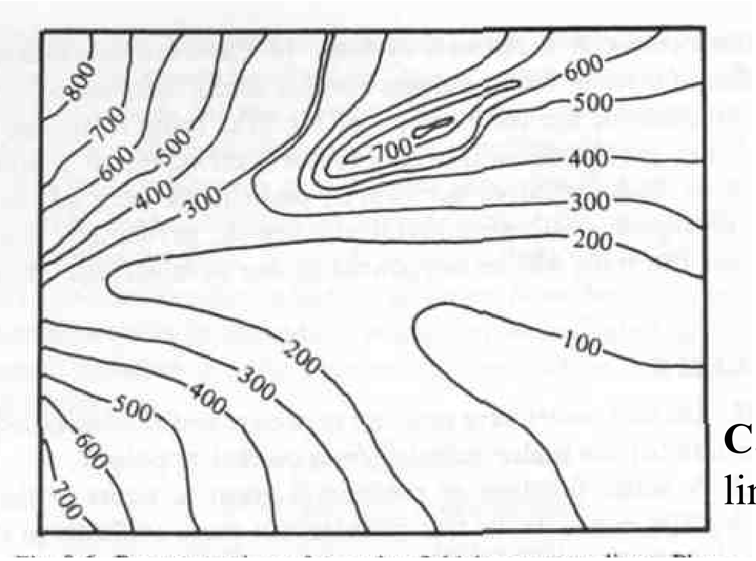
Solo pochissime grandezze fisiche assumono valori costanti. Più frequentemente il valore di una quantità fisica (es. temperatura, forza) dipende dai punti dello spazio e dai valori temporali in cui essa è considerata.

Per fare riferimento alla totalità dei valori della quantità fisica in tutti i punti dello spazio di interesse si introduce il concetto di **campo**.

In sostanza i campi sono rappresentati come funzioni (scalari o vettoriali) di posizione e tempo.

$$S(\mathbf{r},t) \Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z \qquad &&\text{(Cartesiane)} \\ &= \mathbf{r}r + \mathbf{k}z &&\text{(Cilindriche)} \\ &= \mathbf{r}r &&\text{(Sferiche)} \end{aligned}$$

Sebbene una rappresentazione analitica dei campi sia essenziale per una rigorosa trattazione teorica, una *rappresentazione grafica* risulta molto efficace.



Campo scalare: linee di livello

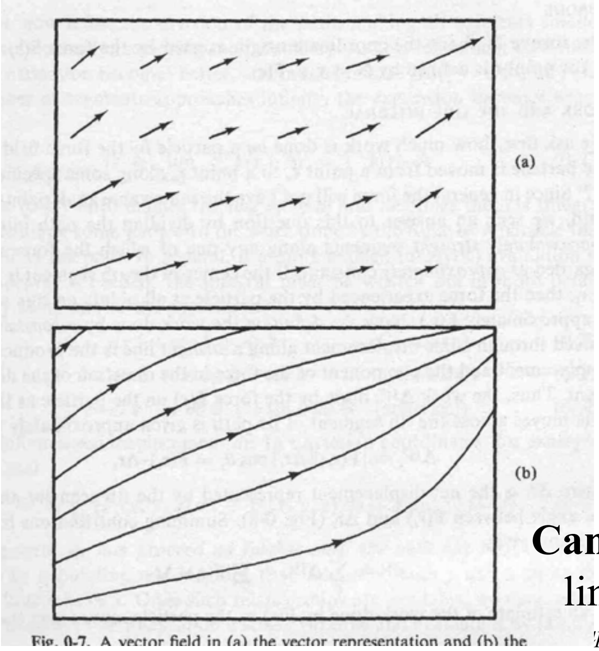


Fig. 0-7. A vector field in (a) the vector representation and (b) the

Campo vettoriale: linee di forza

pollonio@die.uniroma1.it

Operatori differenziali

Operatore nabla ∇

$$\nabla[\,] = \boldsymbol{x_0}\frac{\partial[\,]}{\partial x} + \boldsymbol{y_0}\frac{\partial[\,]}{\partial y} + \boldsymbol{z_0}\frac{\partial[\,]}{\partial z}$$

Gradiente di uno scalare

$$\nabla\Phi = \mathbf{x}_0\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \mathbf{y}_0\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \mathbf{z}_0\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

Divergenza di un vettore

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

rotore di un vettore

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

apollonio@die.uniroma1.it

Operatori differenziali

Operatore nabla ∇

$$\nabla[\,] = \mathbf{x_{01}}\frac{\partial[\,]}{\partial x_1} + \mathbf{x_{02}}\frac{\partial[\,]}{\partial x_2} + \mathbf{x_{03}}\frac{\partial[\,]}{\partial x_3}$$

Campo scalare

Campo vettoriale

Gradiente di uno scalare:
campo vettoriale

$$\nabla\Phi = \mathbf{x_{01}}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \mathbf{x_{02}}\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} + \mathbf{x_{03}}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}$$

Divergenza di un vettore:
campo scalare

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$$

Rotore di un vettore:
campo vettoriale

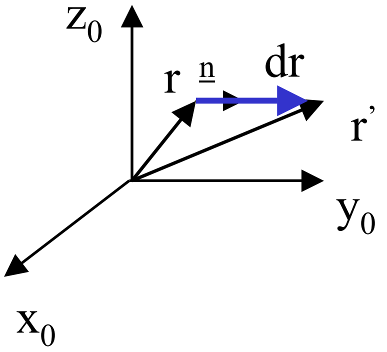
$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} x_{01} & x_{02} & x_{03} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

apollonio@die.uniroma1.it

Gradiente: interpretazione fisica

$$\nabla\Phi = \mathbf{x_0}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \mathbf{y_0}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \mathbf{z_0}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$$d\mathbf{r} = \mathbf{x_0}dx + \mathbf{y_0}dy + \mathbf{z_0}dz$$



$$d\Phi = \nabla\Phi\cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz$$

$$d\mathbf{r} = \mathbf{n}\,dl$$

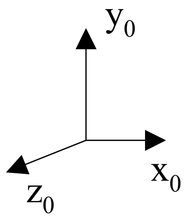
derivata direzionale $$\nabla\Phi\cdot\mathbf{n} = \frac{d\Phi}{dl}$$

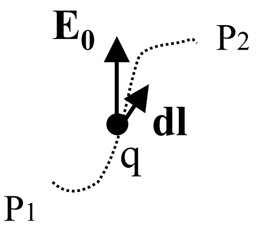
La componente su n del gradiente misura il tasso di variazione della funzione Φ *rispetto alla distanza nella direzione di n. Quindi quanto più rapidamente* Φ *varia agli occhi di un osservatore che si allontana da un punto iniziale nella direzione di n tanto più grande sarà la componente di* $\nabla\Phi$ *in quella direzione.*

apollonio@die.uniroma1.it

Esempio: gradiente

$$\Phi_{21} = \frac{L}{q} = -\int_{P1}^{P2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} \qquad => \qquad d\Phi = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{dl}$$





$$d\Phi = -\left(E_x dx + E_y dy + E_z dz\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz$$

$$\left[\begin{aligned} \mathbf{dl} &= \mathbf{x}_0 dx + \mathbf{y}_0 dy + \mathbf{z}_0 dz \\ \mathbf{E} &= \mathbf{x}_0 E_x + \mathbf{y}_0 E_y + \mathbf{z}_0 E_z \end{aligned}\right.$$

$$E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

$$\Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = -\left(\mathbf{x_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{y_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{z_0} \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) =$$

$$= -\nabla \Phi$$

apollonio@die.uniroma1.it

Divergenza: interpretazione fisica

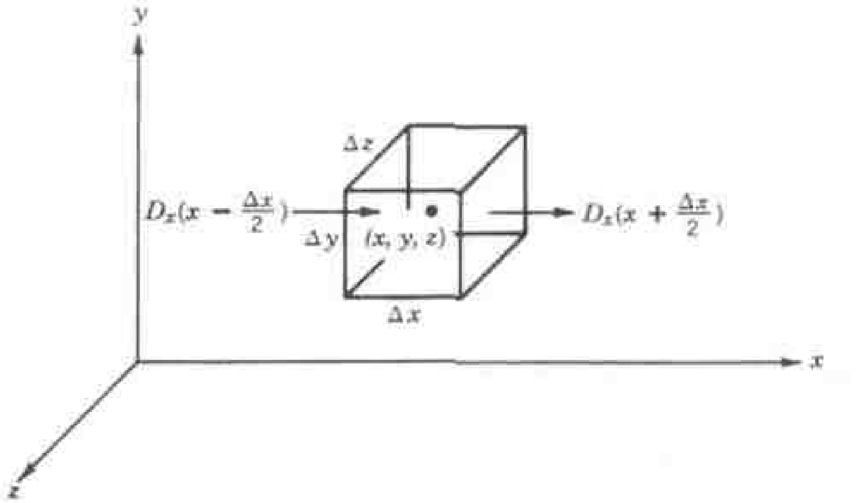
$$\oint_S \mathbf{n}\cdot D\, dS = \int_V \rho\, dV$$

$$\lim_{\Delta V -> 0} \frac{\oint_S \mathbf{n}\cdot D\, dS}{\Delta V} = \lim_{\Delta V -> 0} \frac{\int_V \rho\, dV}{\Delta V}$$

$$\nabla \cdot D = \rho$$

$$\downarrow$$

Flusso del vettore D
per unità di volume



Il flusso netto attraverso il volume infinitesimo Δx, Δy, Δz sarà pari al flusso attraverso le sei facce del volume :

per la direzione x

$$D_x\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \cong D_x(x)+\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x(x)}{\partial x} \qquad D_x\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right) \cong D_x(x)-\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x(x)}{\partial x}$$

$$D_x\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y \Delta x - D_x\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y \Delta x$$

e questo vale anche per le altre direzioni y e z

apollonio@die.uniroma1.it

Divergenza: interpretazione fisica

Quindi il flusso netto:

$$\Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial D_x}{\partial x}+\Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial D_y}{\partial y}+\Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial D_x}{\partial x}+\Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial D_y}{\partial y}+\Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial D_z}{\partial z}=\rho\Delta x\Delta y\Delta z$$

Al limite per Δv->0:

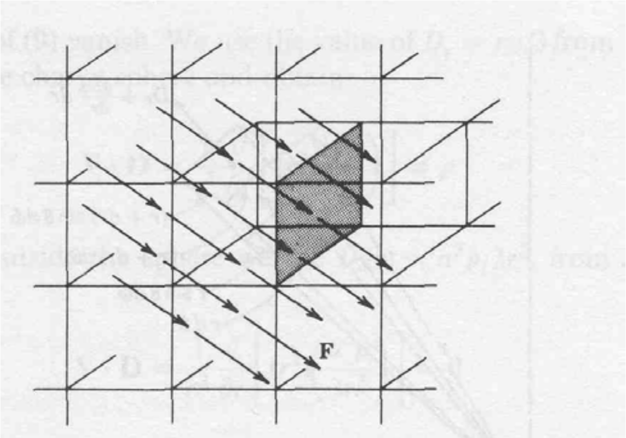
$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\rho$$

⇒

$$\nabla\cdot D=\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot D=\rho$$

La divergenza di un campo vettoriale è quindi una descrizione del modo in cui il campo varia in un punto. E' la quantità di flusso per unità di volume che emerge da un volumetto elementare in un punto.



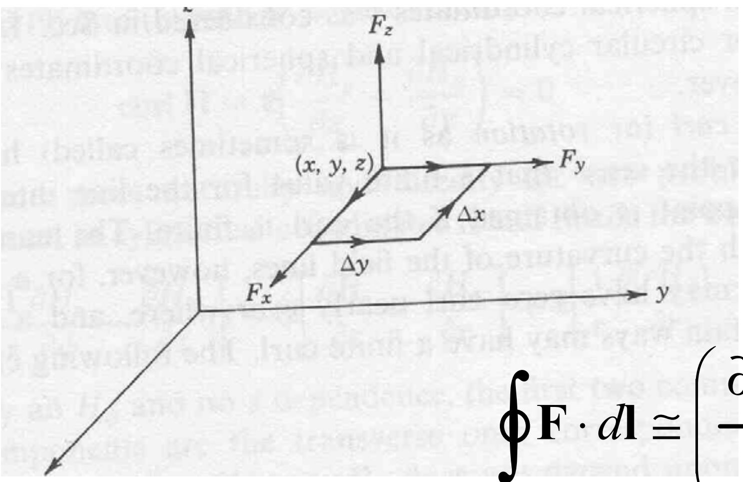
apollonio@die.uniroma1.it

Rotore: interpretazione fisica

Rotore->integrale di linea su un percorso chiuso infinitesimo, diviso per l'area racchiusa da quel percorso.

$$[\nabla\times\mathbf{F}]_i = \lim_{\Delta S_i \to 0} \frac{\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_i}$$

Vettore le cui componenti si trovano orientando una piccola area normale alla direzione di interesse e facendo il limite dell'integrale di linea diviso per l'area.



$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \Delta y F_y\Big|_{x+\Delta x} - \Delta x F_x\Big|_{y+\Delta y} - \Delta y F_y\Big|_{x} + \Delta x F_x\Big|_{y}$$

$$F_x\Big|_{y+\Delta y} \cong F_x\Big|_{y} + \Delta y \frac{\partial F_x}{\partial y}\Big|_{\mathbf{y}} \qquad F_y\Big|_{x+\Delta x} \cong F_y\Big|_{x} + \Delta x \frac{\partial F_y}{\partial x}\Big|_{x}$$

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} \cong \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y \Rightarrow [\nabla\times\mathbf{F}]_z = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$$[\nabla\times\mathbf{F}]_x = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) \qquad [\nabla\times\mathbf{F}]_y = \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)$$

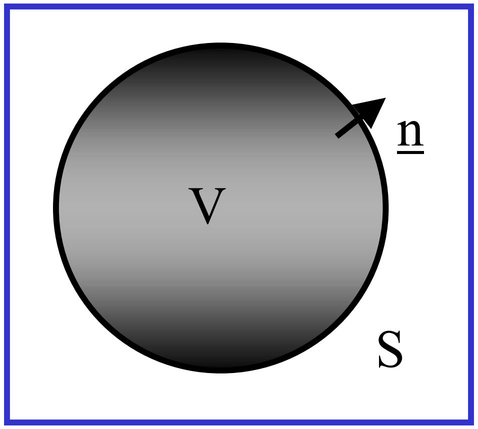
$$\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{x_0}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \mathbf{y_0}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \mathbf{z_0}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

apollonio@die.uniroma1.it

Proprietà integrali dell'operatore ∇

Formula di Green

$$\int_V \nabla[\;]\,dV = \oint_S \mathbf{n}[\;]\,dS$$



Ne discende:

---

1) Teorema del gradiente

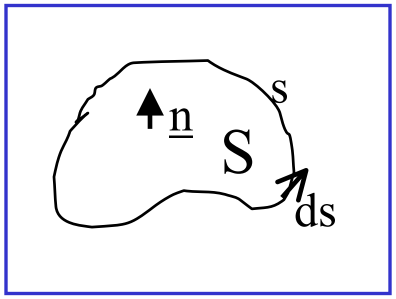
$$\int_V \nabla \Phi \, dV = \oint_s \mathbf{n}\, \Phi \, dS$$

2) Teorema della divergenza

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = \oint_s \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}\, dS$$

3) Teorema del rotore

$$\int_V \nabla \times \mathbf{A}\, dV = \oint_s \mathbf{n} \times \mathbf{A}\, dS$$



Teorema di Stokes (o della circuitazione)

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_s \mathbf{A} \cdot \mathbf{ds}$$

apollonio@die.uniroma1.it

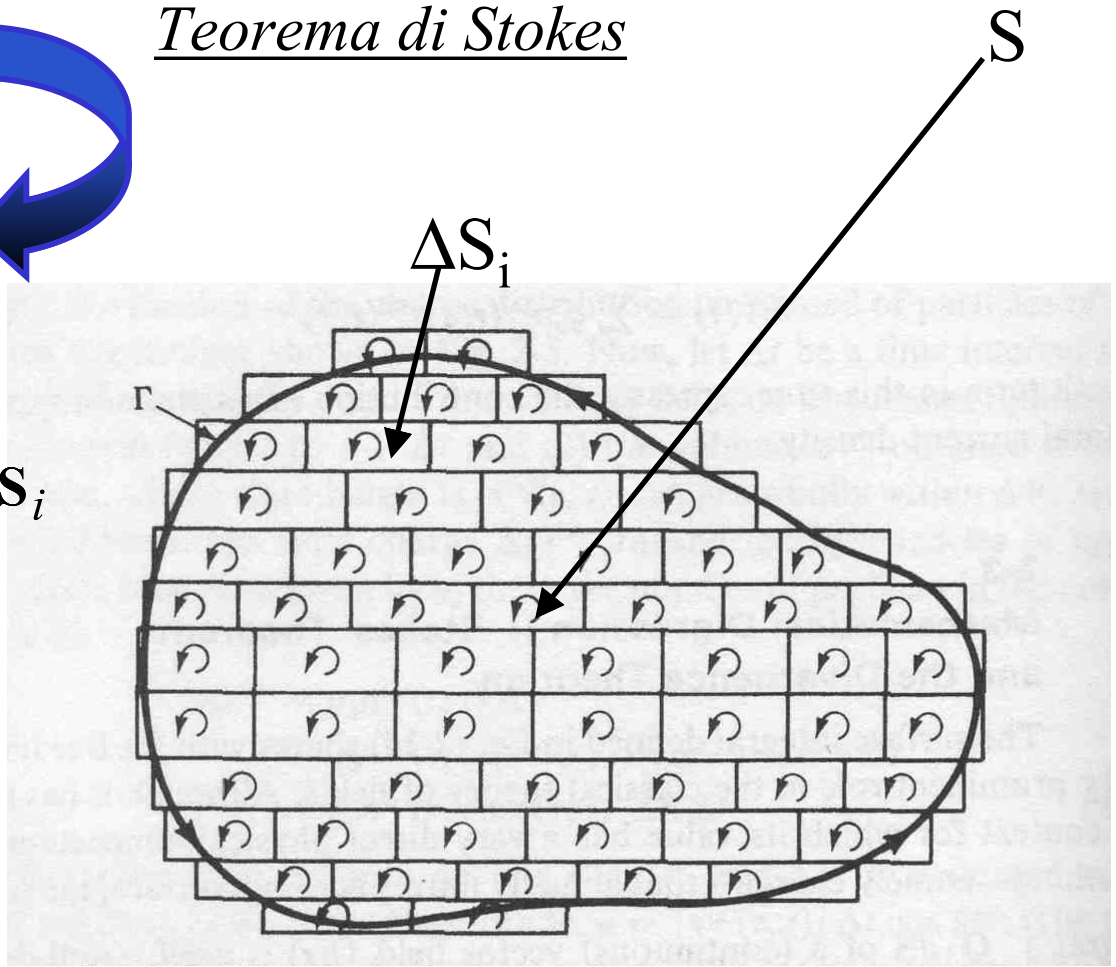
Proprietà integrali dell'operatore

$$\int_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{ds}$$

Teorema di Stokes

$$\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} = \lim_{\Delta S_i -> 0}\sum_i \oint_i \mathbf{F}\cdot\mathbf{ds}$$

$$\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} = \lim_{\Delta S_i -> 0}\sum_i (\nabla\times\mathbf{F})^i \cdot\mathbf{\Delta S}_i$$



$$\boxed{\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} = \int_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{dS}}$$

apollonio@die.uniroma1.it

Identità vettoriali differenziali

Manipolazione di espressioni contenente l'operatore nabla:

- si svolgono le operazioni come se ∇ fosse un vettore ordinario
- quando ∇ opera su prodotti (essendo un operatore differenziale) va applicata la regola di derivazione di un prodotto

1)

$$\nabla(\Phi\Psi)=\nabla_{\Phi}(\Phi\Psi)+\nabla_{\Psi}(\Phi\Psi)=\Psi\nabla\Phi+\Phi\nabla\Psi \qquad \mathbf{C}\Phi\Psi=\Psi\mathbf{C}\Phi=\Phi\mathbf{C}\Psi$$

2)

$$\nabla\cdot(\Phi\mathbf{A})=\nabla_{\Phi}\cdot(\Phi\mathbf{A})+\nabla_{\mathbf{A}}\cdot(\Phi\mathbf{A})=\nabla\Phi\cdot\mathbf{A}+\Phi\nabla\cdot\mathbf{A} \qquad \mathbf{C}\cdot(\Phi\mathbf{A})=(\mathbf{C}\Phi)\cdot\mathbf{A}=\Phi\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}$$

3)

$$\nabla\times(\Phi\mathbf{A})=\nabla_{\Phi}\times(\Phi\mathbf{A})+\nabla_{\mathbf{A}}\times(\Phi\mathbf{A})=\nabla\Phi\times\mathbf{A}+\Phi\nabla\times\mathbf{A} \qquad \mathbf{C}\times(\Phi\mathbf{A})=(\mathbf{C}\Phi)\times\mathbf{A}=\Phi\mathbf{C}\times\mathbf{A}$$

Identità vettoriali differenziali

4)

$$\nabla\cdot\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)=\nabla_{\mathbf{A}}\cdot\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)+\nabla_{\mathbf{B}}\cdot\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)=\mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B}$$

$$\mathbf{C}\cdot\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)=\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{A}=-\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{B}$$

5)

$$\nabla\times\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)=\nabla_{\mathbf{A}}\times\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)+\nabla_{\mathbf{B}}\times\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)=$$

$$\left(\mathbf{B}\cdot\nabla\right)\mathbf{A}-\left(\nabla\cdot\mathbf{A}\right)\mathbf{B}+\left(\nabla\cdot\mathbf{B}\right)\mathbf{A}-\left(\mathbf{A}\cdot\nabla\right)\mathbf{B}$$

$$\mathbf{C}\times\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)=\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\right)\mathbf{A}-\left(\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}\right)\mathbf{B}=\left(\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}\right)\mathbf{A}-\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\right)\mathbf{B}$$

Operatori differenziali del II ordine

$$\mathbf{C}\cdot\left(\mathbf{C}\Phi\right)=\left(\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}\right)\Phi=\mathbf{C}^{2}\Phi$$

6)

$$\nabla\cdot\left(\nabla\Phi\right)=\nabla^{2}\Phi \qquad \nabla^{2}\Rightarrow \mathit{Laplaciano}$$

In coordinate cartesiane:

$$\nabla^{2}\Phi=\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial y^{2}}+\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial z^{2}}$$

apollonio@die.uniroma1.it

Identità vettoriali differenziali

7)

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-(\nabla\cdot\nabla)\mathbf{A}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$$

$$\mathbf{C}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{C}-(\mathbf{C}\cdot\mathbf{C})\mathbf{A}=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{C}-\mathbf{C}^2\mathbf{A}$$

8)

$$\nabla\times(\nabla\Phi)=0$$

$$\mathbf{C}\times(\mathbf{C}\Phi)=(\mathbf{C}\times\mathbf{C})\Phi=0$$

9)

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0$$

$$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=(\mathbf{C}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{A}=0$$

Identità vettoriali differenziali

Lemmi di Green

1)

$$\nabla\cdot\left(\Phi\nabla\Psi\right)=\nabla\Phi\cdot\nabla\Psi+\Phi\nabla^{2}\Psi$$

⇒

$$\int_{\tau}\nabla\cdot\left(\Phi\nabla\Psi\right)d\tau=\int_{\tau}\left(\nabla\Phi\cdot\nabla\Psi+\Phi\nabla^{2}\Psi\right)d\tau$$

$$\boxed{\oint_{S}\Phi\nabla\Psi\cdot\mathbf{n}\;dS=\oint_{S}\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n}dS=\int_{\tau}\left(\nabla\Phi\cdot\nabla\Psi+\Phi\nabla^{2}\Psi\right)d\tau}$$

2) scambiando le due funzioni e sottraendo membro a membro

$$\oint_{S}\Psi\nabla\Phi\cdot\mathbf{n}\;dS=\oint_{S}\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}dS=\int_{\tau}\left(\nabla\Phi\cdot\nabla\Psi+\Psi\nabla^{2}\Phi\right)d\tau$$

$$\boxed{\oint_{S}\left(\Phi\nabla\Psi-\Psi\nabla\Phi\right)\cdot\mathbf{n}\;dS=\oint_{S}\left(\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n}-\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)dS=\int_{\tau}\left(\Phi\nabla^{2}\Psi+\Psi\nabla^{2}\Phi\right)d\tau}$$

apollonio@die.uniroma1.it

Generalizzazione: sistemi di coordinate curvilinee

Non sempre l'uso di coordinate cartesiane è il più conveniente

$$q_1 = q_1(x, y, z), \quad q_2 = q_2(x, y, z), \quad q_3 = q_3(x, y, z)$$

funzioni ad un solo valore

Sistema di coordinate curvilinee

Con riferimento ad un sistema di coordinate cartesiane le equazioni

$$q_1 = C_1, \quad q_2 = C_2, \quad q_3 = C_3$$

rappresentano tre superfici il cui punto di intersezione P è individuato dai tre valori delle coordinate q_1, q_2 e q_3

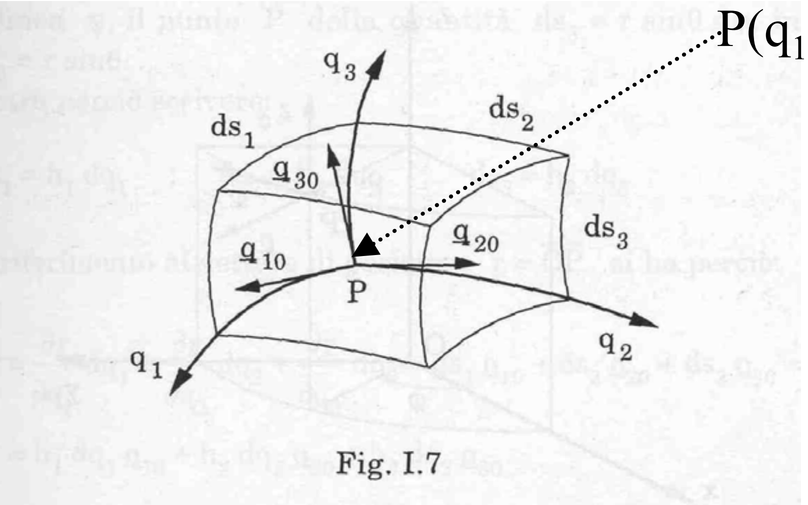
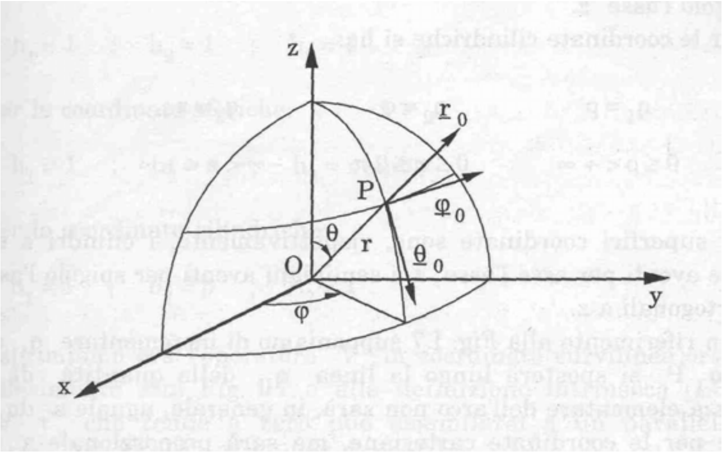


Fig. I.7

$P(q_1,q_2,q_3)$



Se incremento q_1 di dq_1 il punto P si sposta sulla linea q_1 della quantità ds_1 che in generale non coinciderà con dq_1 come avviene per le coordinate cartesiane, ma sarà proporzionale ad esso. Il coefficiente di proporzionalità verrà indicato con $h_1 = \frac{\partial s_1}{\partial q_1}$ chiamato coefficiente metrico

apollonio@die.uniroma1.it

Sistemi di coordinate curvilinee

$$ds_1 = h_1 dq_1, \quad ds_2 = h_2 dq_2, \qquad ds_3 = h_3 dq_3$$

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3 = ds_1 \mathbf{q}_{10} + ds_2 \mathbf{q}_{20} + ds_3 \mathbf{q}_{30} =$$

$$= h_1 dq_1 \mathbf{q}_{10} + h_2 dq_2 \mathbf{q}_{20} + h_3 dq_3 \mathbf{q}_{30}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = h_i \mathbf{q}_{i0} \qquad\qquad h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} = \frac{\partial s_i}{\partial q_i} \qquad \mathbf{i = 1,2,3}$$

Esempi

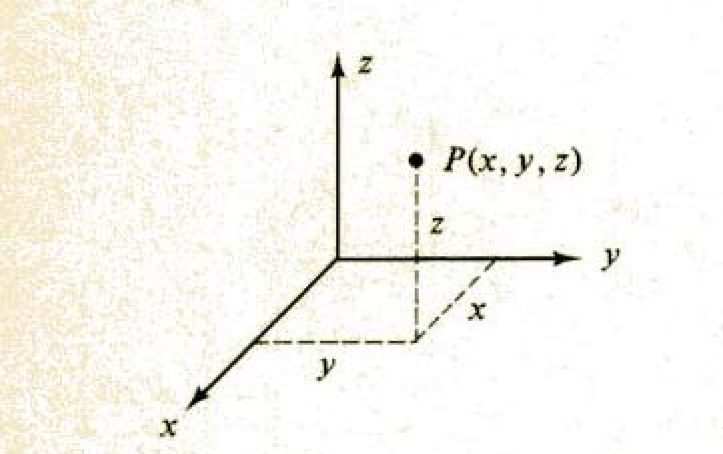
apollonio@die.uniroma1.it

Sistemi di coordinate curvilinee

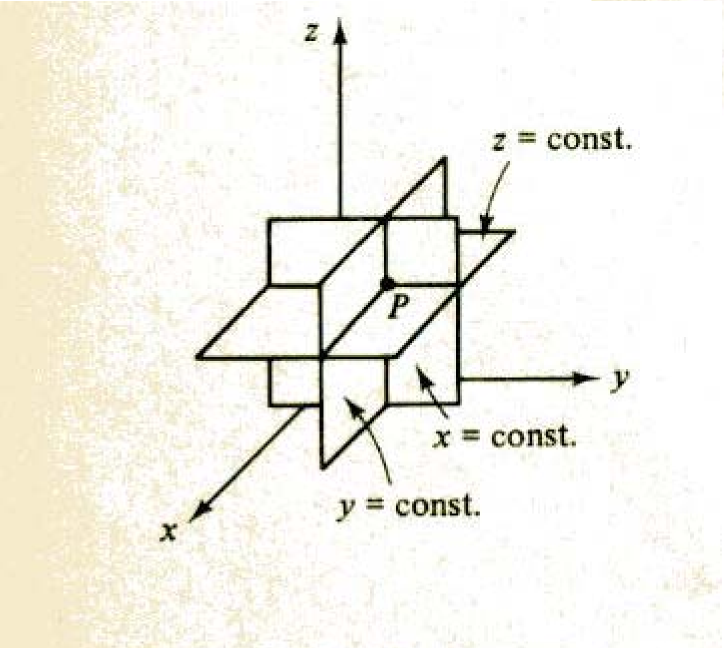
Coordinate cartesiane

$$q_1 = x, \qquad q_2 = y, \qquad q_3 = z$$

$$h_1 = 1, \qquad h_2 = 1, \qquad h_3 = 1$$


z
P(x, y, z)
z
y
x
y
x

(a) Cartesian


z
z = const.
P
y
x = const.
y = const.
x

(a) Cartesian

apollonio@die.uniroma1.it

Sistemi di coordinate curvilinee

Coordinate sferiche

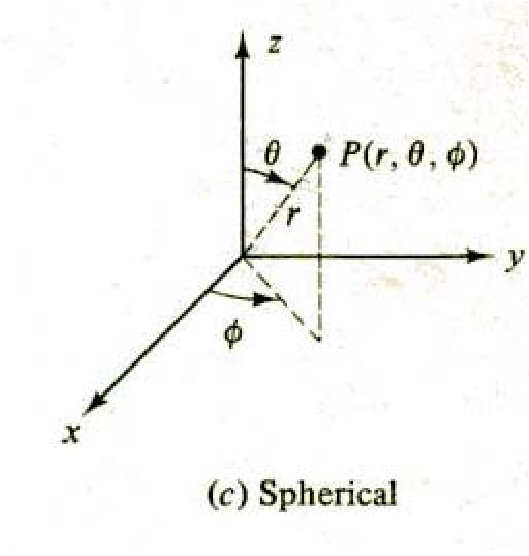
$$q_1 = r, \qquad q_2 = \theta, \qquad q_3 = \varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \qquad \varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

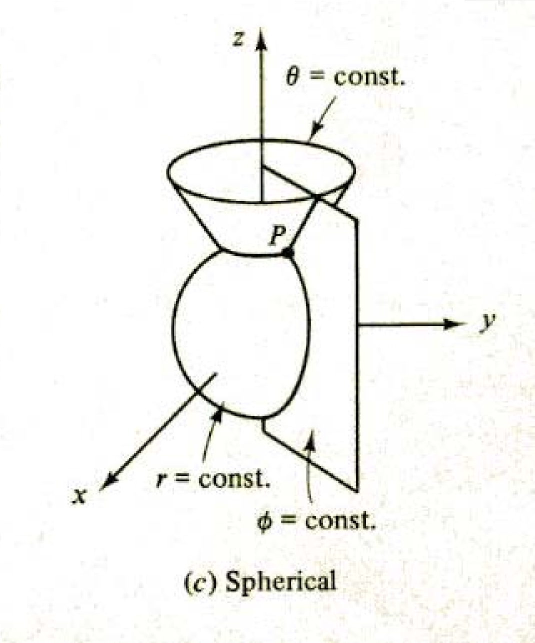
$$0 \le r < \infty \qquad 0 \le \theta < \pi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$h_1 = 1, \qquad h_2 = r, \qquad h_3 = r \sin(\theta)$$

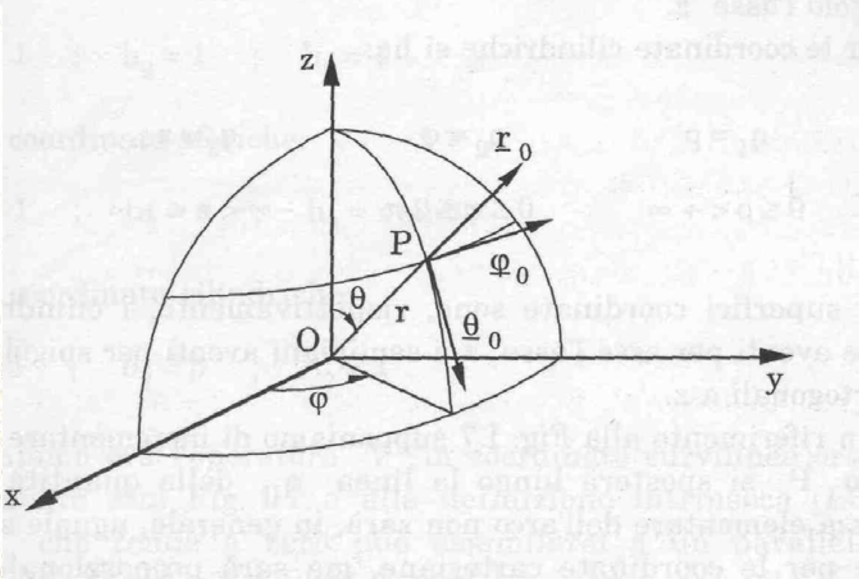
$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$


z
θ
P(r, θ, φ)
r
y
φ
x

(c) Spherical


z
θ = const.
P
y
x
r = const.
φ = const.

(c) Spherical


z
r_0
P
φ_0
θ
r
θ_0
O
y
φ
x

apollonio@die.uniroma1.it

Sistemi di coordinate curvilinee

Coordinate cilindriche

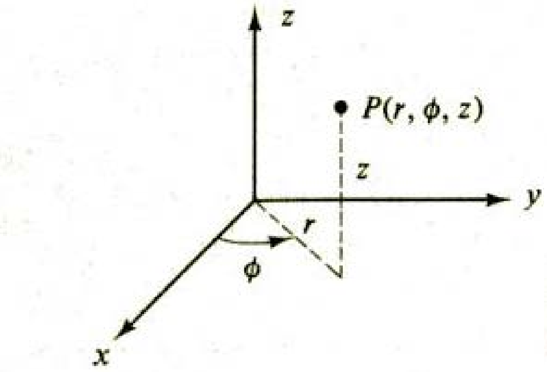
$$q_1 = \rho, \qquad q_2 = \varphi, \qquad q_3 = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \arctan \frac{y}{x} \qquad z = z$$

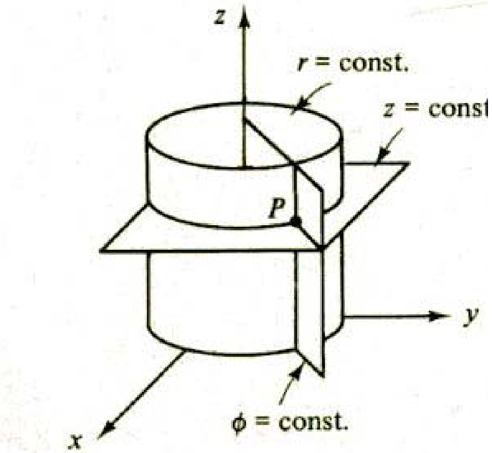
$$0 \leq \rho < \infty \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi \qquad -\infty < z < \infty$$

$$h_1 = 1, \qquad h_2 = \rho, \qquad h_3 = 1$$

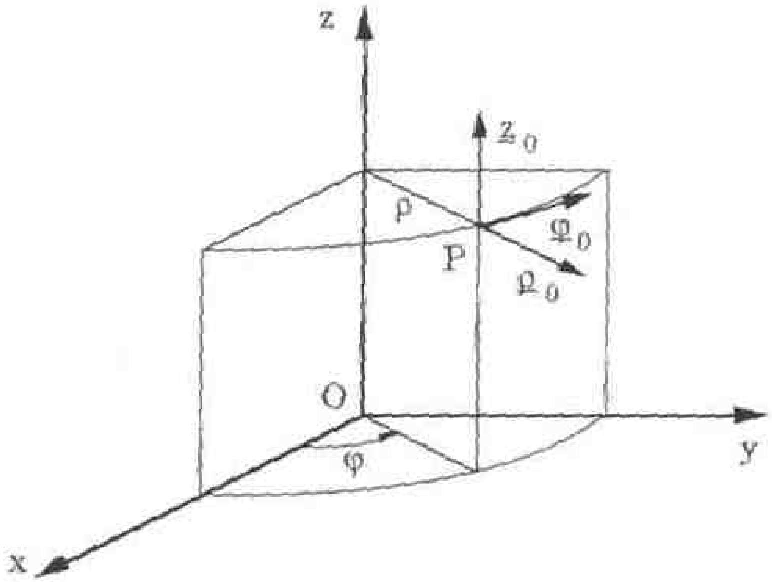
$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$


z
P(r, ϕ, z)
z
y
r
ϕ
x

(b) Cylindrical


z
r = const.
z = const
P
y
x
ϕ = const.

(b) Cylindrical


z
z₀
ρ
φ₀
P
ρ₀
O
y
φ
x

apollonio@die.uniroma1.it

Trasformazioni di coordinate (1)

Forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \underline{q}_{10} \\ \underline{q}_{20} \\ \underline{q}_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1}\frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{1}{h_1}\frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{1}{h_1}\frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{1}{h_2}\frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{1}{h_2}\frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{1}{h_2}\frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{1}{h_3}\frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{1}{h_3}\frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{1}{h_3}\frac{\partial z}{\partial q_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{y}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix} = [A] \begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{y}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix}$$

In coordinate cilindriche,

$$\begin{pmatrix} \underline{\rho}_0 \\ \underline{\varphi}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{y}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix}$$

ossia:

$\underline{\rho}_0 = \cos\varphi\, \underline{x}_0 + \sin\varphi\, \underline{y}_0$

$\underline{\varphi}_0 = -\sin\varphi\, \underline{x}_0 + \cos\varphi\, \underline{y}_0$

$\underline{z}_0 = \underline{z}_0$

In coordinate sferiche:

$$\begin{pmatrix} \underline{r}_0 \\ \underline{\theta}_0 \\ \underline{\varphi}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{y}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix}$$

$\underline{r}_0 = \sin\theta\cos\varphi\, \underline{x}_0 + \sin\theta\sin\varphi\, \underline{y}_0 + \cos\theta\, \underline{z}_0$

$\underline{\theta}_0 = \cos\theta\cos\varphi\, \underline{x}_0 + \cos\theta\sin\varphi\, \underline{y}_0 - \sin\theta\, \underline{z}_0$

$\underline{\varphi}_0 = -\sin\varphi\, \underline{x}_0 + \cos\varphi\, \underline{y}_0$

apollonio@die.uniroma1.it

Trasformazioni di coordinate (2)

Forma inversa

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{y}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1}\frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2}\frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3}\frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{1}{h_1}\frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2}\frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3}\frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{1}{h_1}\frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2}\frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3}\frac{\partial z}{\partial q_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{q}_{10} \\ \underline{q}_{20} \\ \underline{q}_{30} \end{pmatrix} = [A]^T \begin{pmatrix} \underline{q}_{10} \\ \underline{q}_{20} \\ \underline{q}_{30} \end{pmatrix}$$

Particolarizzando alle coordinate cilindriche

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{y}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\rho}_0 \\ \underline{\varphi}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix}$$

ossia:

$$\underline{x}_0 = \cos\varphi\, \underline{\rho}_0 - \sin\varphi\, \underline{\varphi}_0$$

$$\underline{y}_0 = \sin\varphi\, \underline{\rho}_0 + \cos\varphi\, \underline{\varphi}_0$$

$$\underline{z}_0 = \underline{z}_0$$

In coordinate sferiche:

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{y}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{r}_0 \\ \underline{\theta}_0 \\ \underline{\varphi}_0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}_0 = \sin\theta\cos\varphi\, \underline{r}_0 + \cos\theta\cos\varphi\, \underline{\theta}_0 - \sin\varphi\, \underline{\varphi}_0$$

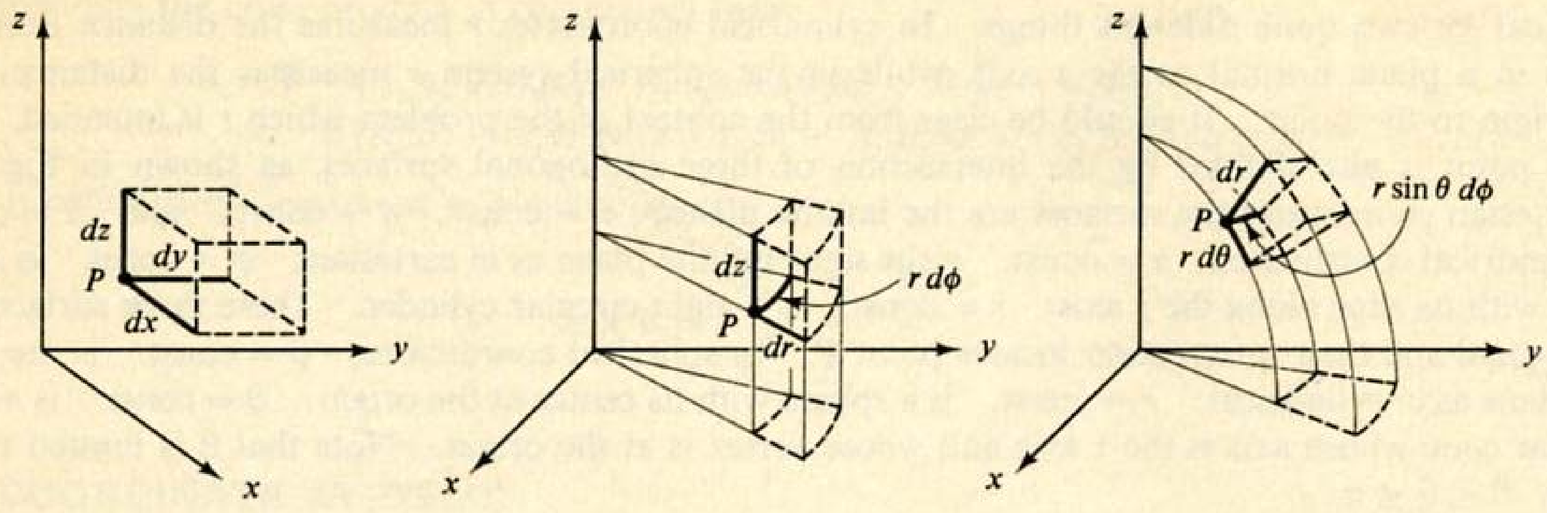
$$\underline{y}_0 = \sin\theta\sin\varphi\, \underline{r}_0 + \cos\theta\sin\varphi\, \underline{\theta}_0 + \cos\varphi\, \underline{\varphi}_0$$

$$\underline{z}_0 = \cos\theta\, \underline{r}_0 - \sin\theta\, \underline{\theta}_0$$

apollonio@die.uniroma1.it

Sistemi di coordinate curvilinee

Volumi, superfici e linee differenziali


z
dz
dy
P
dx
y
x
z
dz
r dφ
P
dr
y
x
z
dr
r sin θ dφ
P
r dθ
y
x

$dv = dx\,dy\,dz$ $\quad$ $dv = r\,dr\,d\phi\,dz$ $\quad$ $dv = r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

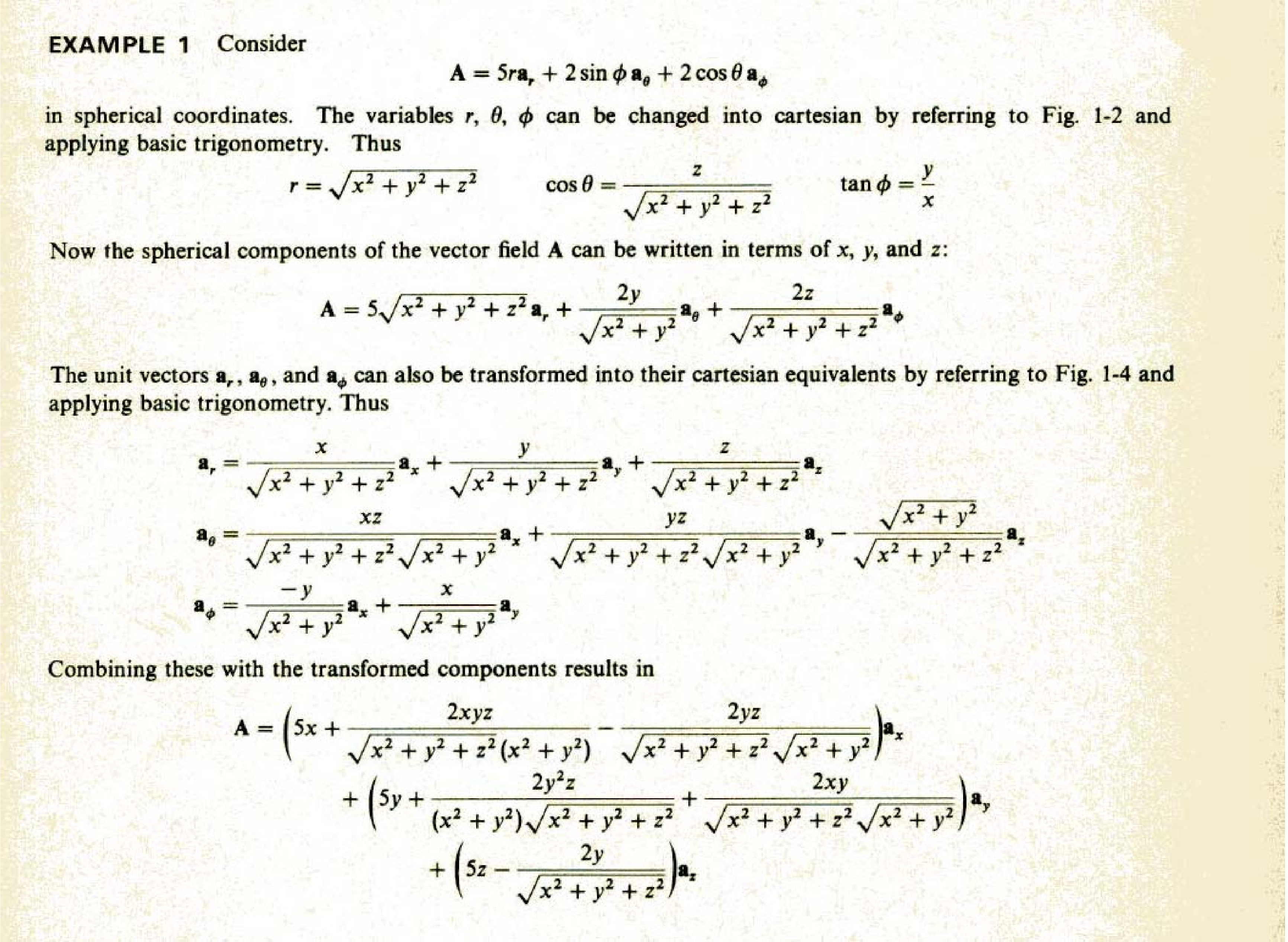
(*a*) Cartesian $\quad$ (*b*) Cylindrical $\quad$ (*c*) Spherical

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad \text{(cartesian)}$$

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2\,d\phi^2 + dz^2 \qquad \text{(cylindrical)}$$

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\,d\phi^2 \qquad \text{(spherical)}$$

apollonio@die.uniroma1.it



EXAMPLE 1 Consider

$$\mathbf{A} = 5r\mathbf{a}_r + 2\sin\phi\,\mathbf{a}_\theta + 2\cos\theta\,\mathbf{a}_\phi$$

in spherical coordinates. The variables r, θ, ϕ can be changed into cartesian by referring to Fig. 1-2 and applying basic trigonometry. Thus

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad \tan\phi = \frac{y}{x}$$

Now the spherical components of the vector field $\mathbf{A}$ can be written in terms of x, y, and z:

$$\mathbf{A} = 5\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathbf{a}_r + \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{a}_\theta + \frac{2z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathbf{a}_\phi$$

The unit vectors $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\theta$, and $\mathbf{a}_\phi$ can also be transformed into their cartesian equivalents by referring to Fig. 1-4 and applying basic trigonometry. Thus

$$\mathbf{a}_r = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathbf{a}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathbf{a}_y + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_\theta = \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{a}_x + \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{a}_y - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathbf{a}_z$$

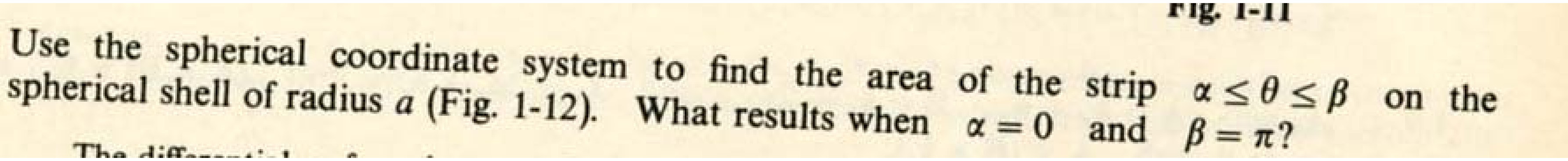
$$\mathbf{a}_\phi = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{a}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{a}_y$$

Combining these with the transformed components results in

$$\begin{aligned}\mathbf{A} = {} & \left(5x + \frac{2xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,(x^2 + y^2)} - \frac{2yz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\mathbf{a}_x \\ & + \left(5y + \frac{2y^2z}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\mathbf{a}_y \\ & + \left(5z - \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

apollonio@die.uniroma1.it

Esercizi

1) 

Use the spherical coordinate system to find the area of the strip $\alpha \le \theta \le \beta$ on the spherical shell of radius a (Fig. 1-12). What results when $\alpha = 0$ and $\beta = \pi$?

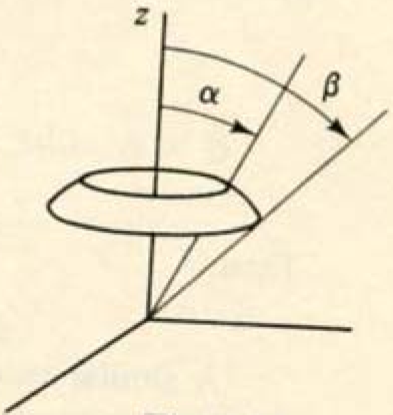
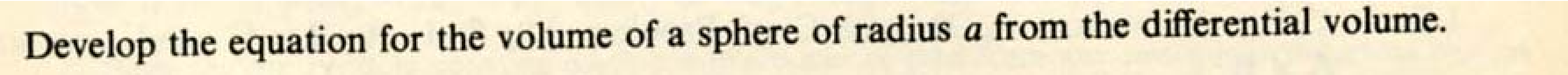


Fig. 1-12

2) 

Develop the equation for the volume of a sphere of radius a from the differential volume.

apollonio@die.uniroma1.it

Esercizi

3) Use the cylindrical coordinate system to find the area of the curved surface of a right circular cylinder where $r = 2$ m, $h = 5$ m, and $30° \leq \phi \leq 120°$ (see Fig. 1-13).

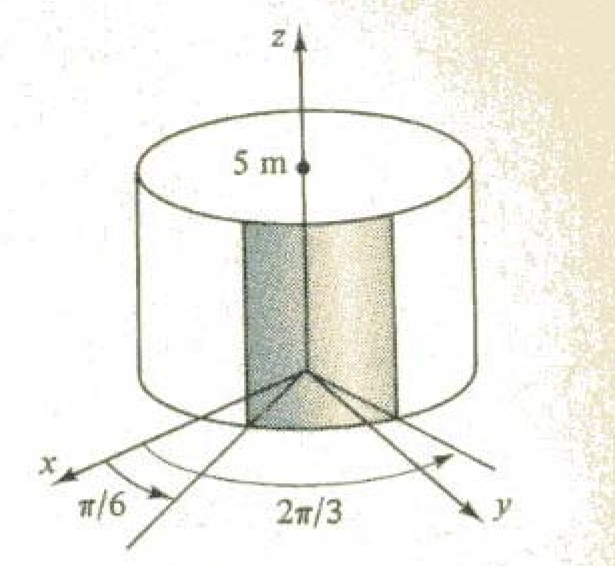


Fig. 1-13

4) Transform

$$\mathbf{A} = y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{a}_z$$

from cartesian to cylindrical coordinates.

apollonio@die.uniroma1.it

Soluzioni

1)

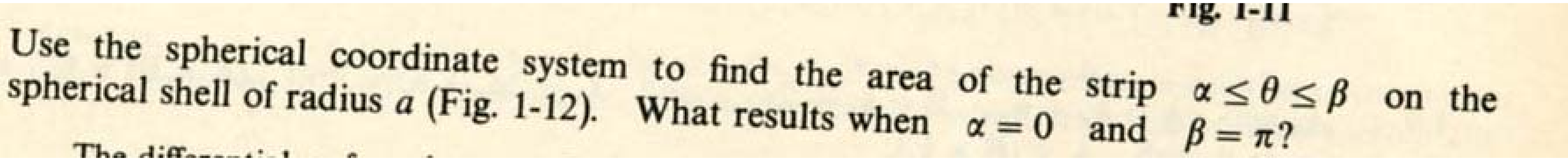
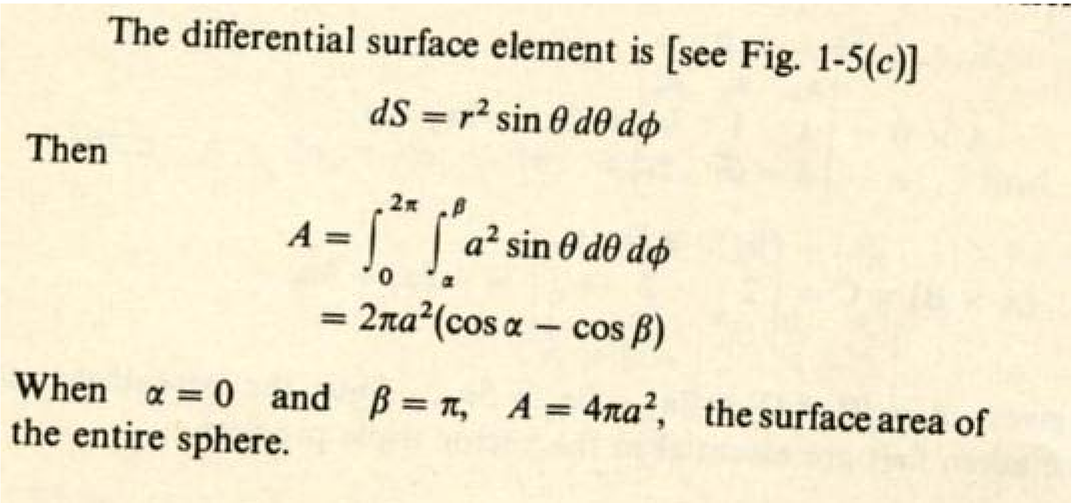


Fig. 1-11

Use the spherical coordinate system to find the area of the strip $\alpha \leq \theta \leq \beta$ on the spherical shell of radius a (Fig. 1-12). What results when $\alpha = 0$ and $\beta = \pi$?



The differential surface element is [see Fig. 1-5(*c*)]

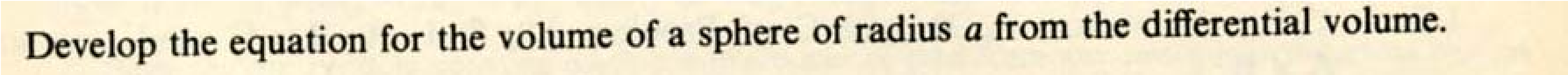
$$dS = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

Then

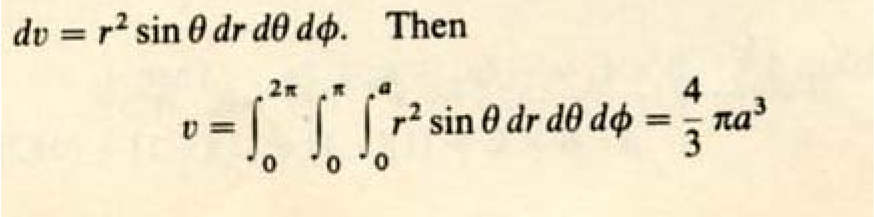
$$A = \int_0^{2\pi} \int_\alpha^\beta a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$
$$= 2\pi a^2 (\cos\alpha - \cos\beta)$$

When $\alpha = 0$ and $\beta = \pi$, $A = 4\pi a^2$, the surface area of the entire sphere.

2)



Develop the equation for the volume of a sphere of radius a from the differential volume.



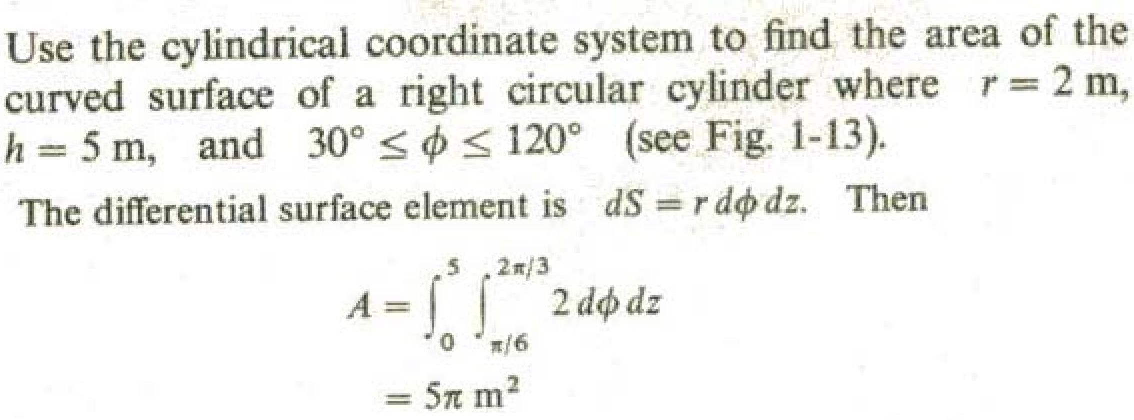
$dv = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$. Then

$$v = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi = \frac{4}{3}\pi a^3$$

apollonio@die.uniroma1.it

Soluzioni

3)



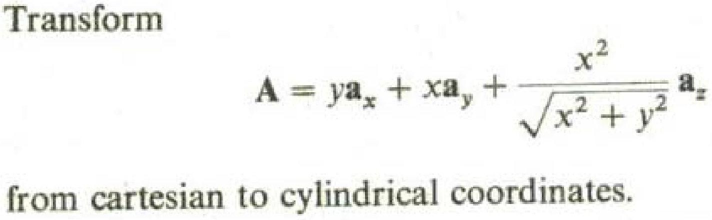
Use the cylindrical coordinate system to find the area of the curved surface of a right circular cylinder where $r = 2$ m, $h = 5$ m, and $30° \le \phi \le 120°$ (see Fig. 1-13).

The differential surface element is $dS = r\,d\phi\,dz$. Then

$$A = \int_0^5 \int_{\pi/6}^{2\pi/3} 2\,d\phi\,dz$$

$$= 5\pi \text{ m}^2$$

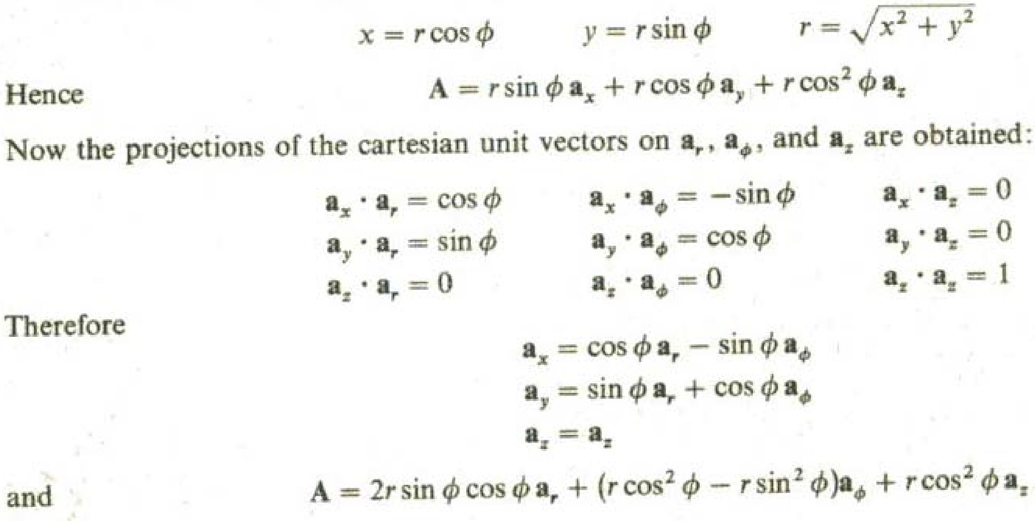
4)



Transform

$$\mathbf{A} = y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{a}_z$$

from cartesian to cylindrical coordinates.



$$x = r\cos\phi \qquad y = r\sin\phi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Hence $\mathbf{A} = r\sin\phi\,\mathbf{a}_x + r\cos\phi\,\mathbf{a}_y + r\cos^2\phi\,\mathbf{a}_z$

Now the projections of the cartesian unit vectors on $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\phi$, and $\mathbf{a}_z$ are obtained:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_r = \cos\phi & \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi = -\sin\phi & \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z = 0 \\ \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_r = \sin\phi & \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi = \cos\phi & \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = 0 \\ \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r = 0 & \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi = 0 & \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1 \end{array}$$

Therefore

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_x &= \cos\phi\,\mathbf{a}_r - \sin\phi\,\mathbf{a}_\phi \\ \mathbf{a}_y &= \sin\phi\,\mathbf{a}_r + \cos\phi\,\mathbf{a}_\phi \\ \mathbf{a}_z &= \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

and $\mathbf{A} = 2r\sin\phi\cos\phi\,\mathbf{a}_r + (r\cos^2\phi - r\sin^2\phi)\mathbf{a}_\phi + r\cos^2\phi\,\mathbf{a}_z$

apollonio@die.uniroma1.it

Sistemi di coordinate curvilinee

Formula di Green

$$\int_V \nabla[\ ]\, dV = \oint_S \mathbf{n}[\ ]\, dS$$

$$\nabla[\ ] = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\mathbf{q}_{10} h_2 h_3 [\ ]\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\mathbf{q}_{20} h_1 h_3 [\ ]\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\mathbf{q}_{30} h_1 h_2 [\ ]\right)\right\}$$

$$\nabla[\ ] = \frac{\mathbf{q}_{10}}{h_1}\frac{\partial[\ ]}{\partial q_1} + \frac{\mathbf{q}_{20}}{h_2}\frac{\partial[\ ]}{\partial q_2} + \frac{\mathbf{q}_{30}}{h_3}\frac{\partial[\ ]}{\partial q_3}$$

$$\nabla\Phi = \frac{\mathbf{q}_{10}}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial q_1} + \frac{\mathbf{q}_{20}}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial q_2} + \frac{\mathbf{q}_{30}}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial q_3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(h_2 h_3 A_{\mathbf{1}}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(h_1 h_3 A_{\mathbf{2}}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(h_1 h_2 A_{\mathbf{3}}\right)\right\}$$

apollonio@die.uniroma1.it

Sistemi di coordinate curvilinee

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{q_{10}} & h_2 \mathbf{q_{20}} & h_3 \mathbf{q_{30}} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

apollonio@die.uniroma1.it

Campi scalari e vettoriali

Le proprietà dei campi EM sono descritte attraverso relazioni fra grandezze fisiche gran parte delle quali hanno la natura di ‘campi vettoriali’

Campi scalari e vettoriali

Campo scalare: funzione scalare di punto $\Psi(P)=\Psi(\mathbf{r})$ La rappresentazione di un campo vettoriale può avvenire attraverso le superfici di livello

Campo vettoriale: funzione vettoriale di punto $\mathbf{A}(P)=\mathbf{A}(\mathbf{r})$ La rappresentazione di un campo vettoriale può avvenire mediante linee di forza o linee di flusso del vettore

- *Campo solenoidale*: le linee di forza sono chiuse, non hanno né inizio né fine (deriva da “vortici”, privo di sorgenti)

- *Campo irrotazionale o conservativo*: le linee di forza sono aperte, hanno origine e termine in particolari punti dello spazio (deriva da “sorgenti”, privo di vortici)

apollonio@die.uniroma1.it

Campi irrotazionali e solenoidali

Dato un campo vettoriale $\mathbf{F}$ che sia il gradiente di una funzione scalare Φ $\mathbf{F} = \nabla\Phi$ ⇒ $\nabla \times \mathbf{F} = 0$

Consideriamo ora un campo vettoriale $\mathbf{F}$ che sia privo di vortici in una regione τ (irrotazionale), cioè supponiamo:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad in \quad \tau$$

ci chiediamo se esiste una funzione scalare il cui gradiente sia pari al campo vettoriale $\mathbf{F}$ Cioè:

$$\nabla\Phi = \mathbf{F}$$

se questa funzione esiste essa si chiama potenziale scalare del campo vettoriale $\mathbf{F}$

E' possibile dimostrare che tale funzione esiste a patto che la regione in cui $\mathbf{F}$ è irrotazionale sia a connessione lineare semplice

---

Dato un campo vettoriale $\mathbf{B}$ che sia il rotore di una funzione scalare $\mathbf{A}$ $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ⇒ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Consideriamo ora un campo vettoriale $\mathbf{B}$ che sia privo di sorgenti in una regione τ (solenoidale), cioè supponiamo:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad in \quad \tau$$

ci chiediamo se esiste una funzione vettoriale il cui rotore sia pari al campo vettoriale $\mathbf{B}$ Cioè:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

se questa funzione esiste essa si chiama potenziale vettore del campo vettoriale $\mathbf{B}$

E' possibile dimostrare che tale funzione esiste a patto che la regione in cui $\mathbf{B}$ è solenoidale sia a connessione superficiale semplice