

Esercitazione 2

Francesca Apollonio

Dipartimento Ingegneria Elettronica

E-mail: apollonio@die.uniroma1.it

Vettori complessi

Data una grandezza scalare $E(t)$ variabile cosinusoidalmente nel tempo

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \leftarrow \text{fase}$$

$\nwarrow$ *ampiezza* $\nearrow$ *pulsazione*

Si può esprimere $E(t)$ come segue:

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 \operatorname{Re} \left[e^{(j\omega t + \varphi)} \right] = \operatorname{Re} \left[E_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[\mathbf{E} e^{j\omega t} \right] = \frac{1}{2} \left(\mathbf{E} e^{j\omega t} + \mathbf{E}^* e^{-j\omega t} \right) \end{aligned}$$

$\nwarrow$ *grandezza complessa associata a quella istantanea -> fasore*

$$\mathbf{E} = E_0 e^{j\varphi}$$

Vettori complessi

Se ora consideriamo la funzione vettoriale $\underline{\mathbf{E}}(t)$ le cui componenti sui tre assi variano sinusoidalmente nel tempo:

$$\underline{\mathbf{E}}(t) = \mathbf{x}_0 E_x(t) + \mathbf{y}_0 E_y(t) + \mathbf{z}_0 E_z(t)$$

$$E_x(t) = \text{Re} \left[\mathbf{E}_x e^{j\omega t} \right]$$

$$E_y(t) = \text{Re} \left[\mathbf{E}_y e^{j\omega t} \right]$$

$$E_z(t) = \text{Re} \left[\mathbf{E}_z e^{j\omega t} \right]$$

I relativi fasori

$$\mathbf{E}_x = E_{0x} e^{j\varphi_x} = \mathbf{E}_{xR} + j\mathbf{E}_{xJ}$$

$$\mathbf{E}_y = E_{0y} e^{j\varphi_y} = \mathbf{E}_{yR} + j\mathbf{E}_{yJ}$$

$$\mathbf{E}_z = E_{0z} e^{j\varphi_z} = \mathbf{E}_{zR} + j\mathbf{E}_{zJ}$$

quantità reali

Si introduce il vettore complesso $\underline{\mathbf{E}}$

$$\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{x}_0 \mathbf{E}_x + \mathbf{y}_0 \mathbf{E}_y + \mathbf{z}_0 \mathbf{E}_z = \underline{\mathbf{E}}_R + j\underline{\mathbf{E}}_J \quad \text{dove}$$

$$\underline{\mathbf{E}}_R = \mathbf{x}_0 \mathbf{E}_{xR} + \mathbf{y}_0 \mathbf{E}_{yR} + \mathbf{z}_0 \mathbf{E}_{zR}$$

$$\underline{\mathbf{E}}_J = \mathbf{x}_0 \mathbf{E}_{xJ} + \mathbf{y}_0 \mathbf{E}_{yJ} + \mathbf{z}_0 \mathbf{E}_{zJ}$$

Vettori complessi

Si ha che:

$$\underline{\mathbf{E}}(t) = \text{Re} \left[(\mathbf{x}_0 \mathbf{E}_x + \mathbf{y}_0 \mathbf{E}_y + \mathbf{z}_0 \mathbf{E}_z) e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[\underline{\mathbf{E}} e^{j\omega t} \right] =$$

$$\text{Re} \left[\underline{\mathbf{E}}_R e^{j\omega t} + j \underline{\mathbf{E}}_J e^{j\omega t} \right] = \underline{\mathbf{E}}_R \cos(\omega t) - \underline{\mathbf{E}}_J \sin(\omega t)$$

Il vettore istantaneo $\underline{\mathbf{E}}(t)$ è dato dalla somma dei vettori $\underline{\mathbf{E}}_R \cos(\omega t)$ e $-\underline{\mathbf{E}}_J \sin(\omega t)$ che hanno:

- direzioni fisse nello spazio
- ampiezze variabili nel tempo

e quindi individuano un piano sul quale l'estremo libero di $\underline{\mathbf{E}}(t)$ descrive un luogo geometrico al variare di t

$$\underline{\mathbf{E}}(t) = \mathbf{x}_0 E_{0x} \cos(\omega t + \varphi_x) + \mathbf{y}_0 E_{0y} \cos(\omega t + \varphi_y) + \mathbf{z}_0 E_{0z} \cos(\omega t + \varphi_z) =$$

$$\text{Re} \left[(\mathbf{x}_0 E_{0x} e^{j\varphi_x} + \mathbf{y}_0 E_{0y} e^{j\varphi_y} + \mathbf{z}_0 E_{0z} e^{j\varphi_z}) e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[\underline{\mathbf{E}} e^{j\omega t} \right]$$

$$\mathbf{E}_x = \mathbf{E}_{0x} e^{j\varphi_x} \quad \mathbf{E}_y = \mathbf{E}_{0y} e^{j\varphi_y} \quad \mathbf{E}_z = \mathbf{E}_{0z} e^{j\varphi_z}$$

Proprietà dei vettori complessi

- *Un vettore complesso non si può disegnare come i vettori reali perché ha componenti complesse non associabili ai punti di una retta.*
- *Modulo di un vettore complesso (quantità reale positiva)*

$$|\underline{\mathbf{A}}| = \sqrt{\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{A}}^*} = \sqrt{|\underline{\mathbf{A}}_x|^2 + |\underline{\mathbf{A}}_y|^2 + |\underline{\mathbf{A}}_z|^2}$$

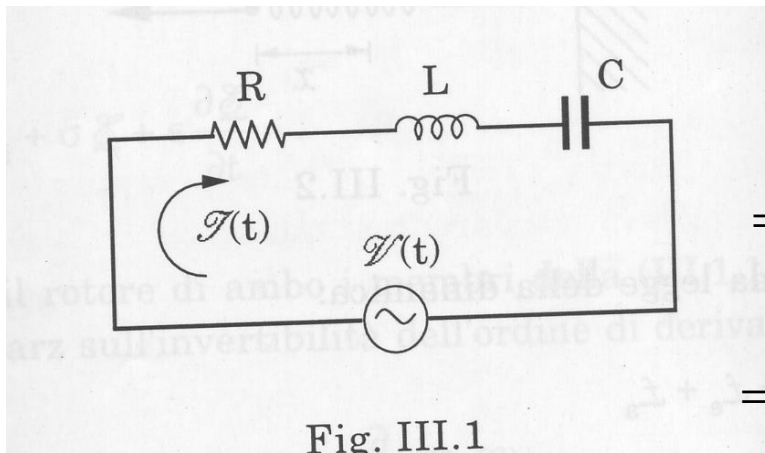
- *Prodotto scalare: se il prodotto scalare tra due vettori complessi è nullo non è detto che i vettori parte reale e parte immaginaria siano separatamente ortogonali tra loro*

$$\underline{\mathbf{u}} = (2 + j3)\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_0 = (2\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_0) + j3\mathbf{x}_0 = \underline{\mathbf{u}}_R + j\underline{\mathbf{u}}_J$$

$$\underline{\mathbf{v}} = -j\mathbf{x}_0 + (-3 + j2)\mathbf{y}_0 = -3\mathbf{y}_0 + j(2\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0) = \underline{\mathbf{v}}_R + j\underline{\mathbf{v}}_J$$

$$\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{v}} = -j(2 + j3) - 3 + j2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathbf{u}}_R \cdot \underline{\mathbf{v}}_R = -3 \quad \underline{\mathbf{u}}_J \cdot \underline{\mathbf{v}}_J = -3$$

Vettori complessi: rappresentazione quantità non lineari



$$\begin{aligned}
 P(t) &= V(t)I(t) = \operatorname{Re}\left[Ve^{i\omega t}\right] \frac{1}{2} \left(Ie^{i\omega t} + I^*e^{-i\omega t}\right) = \\
 &= \operatorname{Re}\left[Ve^{i\omega t} \frac{1}{2} \left(Ie^{i\omega t} + I^*e^{-i\omega t}\right)\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2}VIe^{2i\omega t} + \frac{1}{2}VI^*\right] = \\
 &= \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2}VIe^{2i\omega t}\right] + \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2}VI^*\right]
 \end{aligned}$$

valor medio in un periodo della potenza istantanea fornita dal generatore al circuito

Potenza complessa

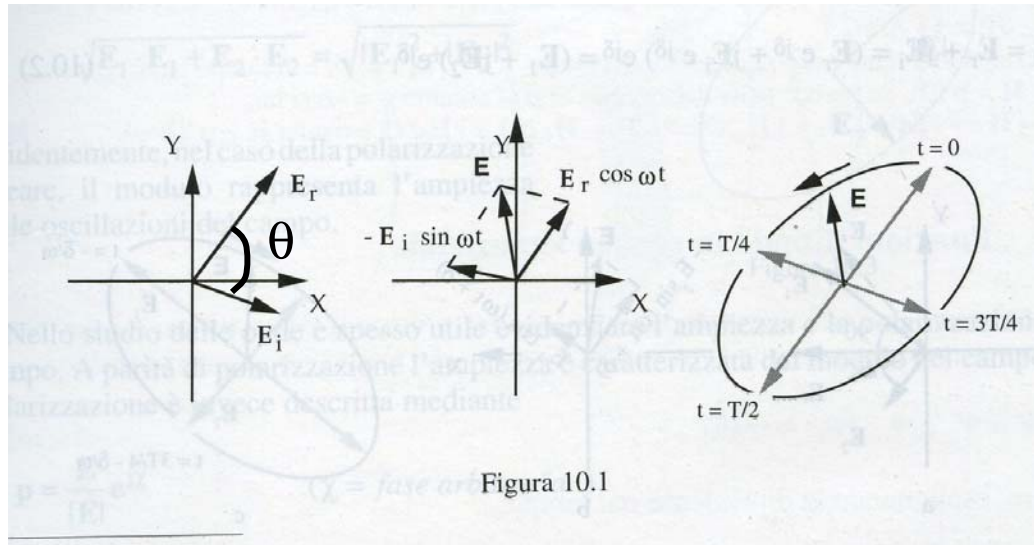
$$P = \frac{1}{2}VI^* = P_R + jP_J$$

$\nwarrow$ $\swarrow$
p. reale *p. reattiva*

$$P_R = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt$$

Polarizzazione

$$\underline{\mathbf{E}}(t) = \text{Re} \left[(x_0 \mathbf{E}_x + y_0 \mathbf{E}_y + z_0 \mathbf{E}_z) e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[\underline{\mathbf{E}} e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[\underline{\mathbf{E}}_R e^{j\omega t} + j \underline{\mathbf{E}}_J e^{j\omega t} \right] = \underline{\mathbf{E}}_R \cos(\omega t) - \underline{\mathbf{E}}_J \sin(\omega t)$$



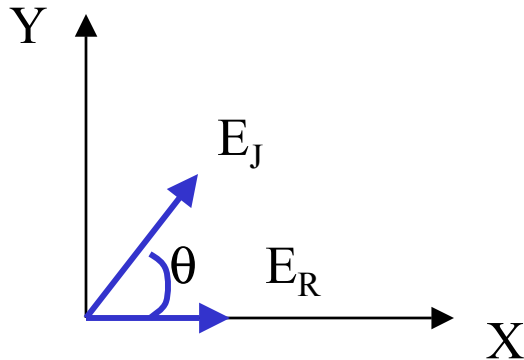
Un vettore sinusoidale può essere rappresentato dalla somma di due vettori che oscillano in quadratura secondo direzioni fisse. Il vettore $\underline{\mathbf{E}}(t)$ giace sul piano che contiene $\underline{\mathbf{E}}_R$ ed $\underline{\mathbf{E}}_J$ ed il suo estremo descrive una traiettoria ellittica.

Le coordinate dell'estremo di $\underline{\mathbf{E}}(t)$ saranno:

$$\begin{aligned} X &= E_{Rx} \cos(\omega t) - E_{Jx} \sin(\omega t) \\ Y &= E_{Ry} \cos(\omega t) - E_{Jy} \sin(\omega t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} X E_{Ry} - Y E_{Rx} &= E_{Jy} E_{Rx} - E_{Ry} E_{Jx} \sin(\omega t) \\ X E_{Jy} - Y E_{Jx} &= E_{Jy} E_{Rx} - E_{Ry} E_{Jx} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$\left(X E_{Ry} - Y E_{Rx} \right)^2 + \left(X E_{Jy} - Y E_{Jx} \right)^2 = \left(E_{Jy} E_{Rx} - E_{Ry} E_{Jx} \right)^2$$

Polarizzazione



$$X(t) = E_R \cos(\omega t) - E_J \sin(\omega t) \cos \vartheta$$

$$Y(t) = -E_J \sin(\omega t) \sin \vartheta$$

$$\sin(\omega t) = -\frac{Y}{E_J \sin \vartheta}$$

$$E_R \cos(\omega t) = X - \frac{Y}{E_J \sin \vartheta} \cos \vartheta = X - Y \cot \vartheta$$

$$(E_R \cos(\omega t))^2 = E_R^2 (1 - \sin^2(\omega t)) = X^2 - 2XY \cot \vartheta + Y^2 \cot^2 \vartheta$$

$$E_R^2 \left(1 - \frac{Y^2}{E_J^2 \sin^2 \vartheta} \right) = X^2 - 2XY \cot \vartheta + Y^2 \cot^2 \vartheta$$

$$E_R^2 = X^2 - 2XY \cot \vartheta + Y^2 \left(\frac{E_R^2}{E_J^2 \sin^2 \vartheta} + \cot^2 \vartheta \right)$$

$$b^2 - 4ac = 4 \cot^2 \vartheta - 4 \left(\cot^2 \vartheta + \frac{E_R^2}{E_J^2 \sin^2 \vartheta} \right) = -\frac{E_R^2}{E_J^2 \sin^2 \vartheta} < 0$$

conica del tipo:

$$aX^2 + bXY + cY^2 = d$$

il cui discriminante:

Polarizzazione

$$\underline{\mathbf{E}}(t) = \underline{\mathbf{E}}_R \cos(\omega t) - \underline{\mathbf{E}}_J \sin(\omega t)$$

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_R + j\underline{\mathbf{E}}_J$$

Nel caso in cui $\theta = \pi/2$ cioè $\underline{\mathbf{E}}_R \cdot \underline{\mathbf{E}}_J = 0$ e $|\underline{\mathbf{E}}_R| = |\underline{\mathbf{E}}_J|$



*Polarizzazione
circolare*

$$E_R^2 = X^2 + Y^2$$

Nel caso in cui $\theta = 0$ cioè $\underline{\mathbf{E}}_R \times \underline{\mathbf{E}}_J = 0$
oppure $\underline{\mathbf{E}}_R = 0$ o $\underline{\mathbf{E}}_J = 0$



*Polarizzazione
lineare*

$$X(t) = E_R \cos(\omega t) \mp E_J \sin(\omega t)$$

$$Y(t) = 0$$

Esercizi su polarizzazione

1)

$$\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{y}_0 + 3\mathbf{z}_0$$



Polarizzazione lineare

$$\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{R}} = \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{y}_0 + 3\mathbf{z}_0$$

$$\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{J}} = 0$$

$$\underline{\mathbf{A}}(t) = \text{Re}[(\mathbf{x}_0 + 2\mathbf{y}_0 + 3\mathbf{z}_0)e^{j\omega t}] = (\mathbf{x}_0 + 2\mathbf{y}_0 + 3\mathbf{z}_0)\cos(\omega t)$$

$$\underline{\mathbf{A}}_x(t) = \cos(\omega t) \quad \underline{\mathbf{A}}_y(t) = 2\cos(\omega t) \quad \underline{\mathbf{A}}_z(t) = 3\cos(\omega t)$$

$$|\underline{\mathbf{A}}(t)| = \sqrt{1 + 4 + 9} |\cos(\omega t)| = \sqrt{14} |\cos(\omega t)|$$

$$|\underline{\mathbf{A}}(t)|_{\max} = \sqrt{14}$$

$$2) \quad \underline{\mathbf{A}} = (\mathbf{x}_0 + 2\mathbf{y}_0 + 3\mathbf{z}_0) - j2(\mathbf{x}_0 + 2\mathbf{y}_0 + 3\mathbf{z}_0)$$

$$\underline{\mathbf{A}}_{\text{R}} = \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{y}_0 + 3\mathbf{z}_0$$

$$\underline{\mathbf{A}}_{\text{J}} = -2(\mathbf{x}_0 + 2\mathbf{y}_0 + 3\mathbf{z}_0)$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{A}}(t) &= (\mathbf{x}_0 + 2\mathbf{y}_0 + 3\mathbf{z}_0)\cos(\omega t) + 2(\mathbf{x}_0 + 2\mathbf{y}_0 + 3\mathbf{z}_0)\sin(\omega t) = \\ &= (\mathbf{x}_0 + 2\mathbf{y}_0 + 3\mathbf{z}_0)(\cos(\omega t) + 2\sin(\omega t)) \end{aligned}$$

$$|\underline{\mathbf{A}}(t)| = \sqrt{14} |\cos(\omega t) + 2\sin(\omega t)|$$

$$\frac{d}{dt} \omega (-\sin(\omega t) + 2\cos(\omega t)) = 0 \quad \longrightarrow \quad \tan(\omega t) = 2$$

$$\cos(\omega t) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\omega t)}} \quad \sin(\omega t) = \pm \frac{\tan(\omega t)}{\sqrt{1 + \tan^2(\omega t)}}$$

$$|\underline{\mathbf{A}}(t)|_{\text{max}} = \sqrt{14} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + 2 \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \sqrt{14} \sqrt{5} = \sqrt{70}$$

3)

$$\underline{\mathbf{A}} = 3\mathbf{x}_0 + 4\mathbf{y}_0 + 5j\mathbf{z}_0$$

$$\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{R}} = 3\mathbf{x}_0 + 4\mathbf{y}_0$$

$$\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{J}} = 5\mathbf{z}_0$$

$$|\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{R}}| = 5$$

$$|\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{J}}| = 5$$



Polarizzazione circolare

$$\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{J}} = 0$$

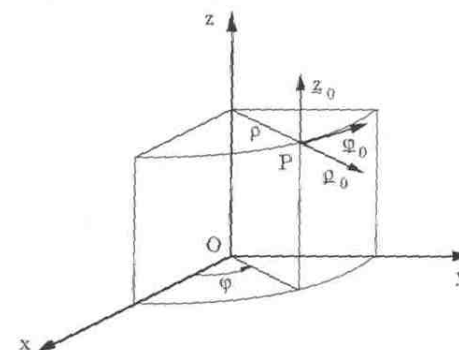
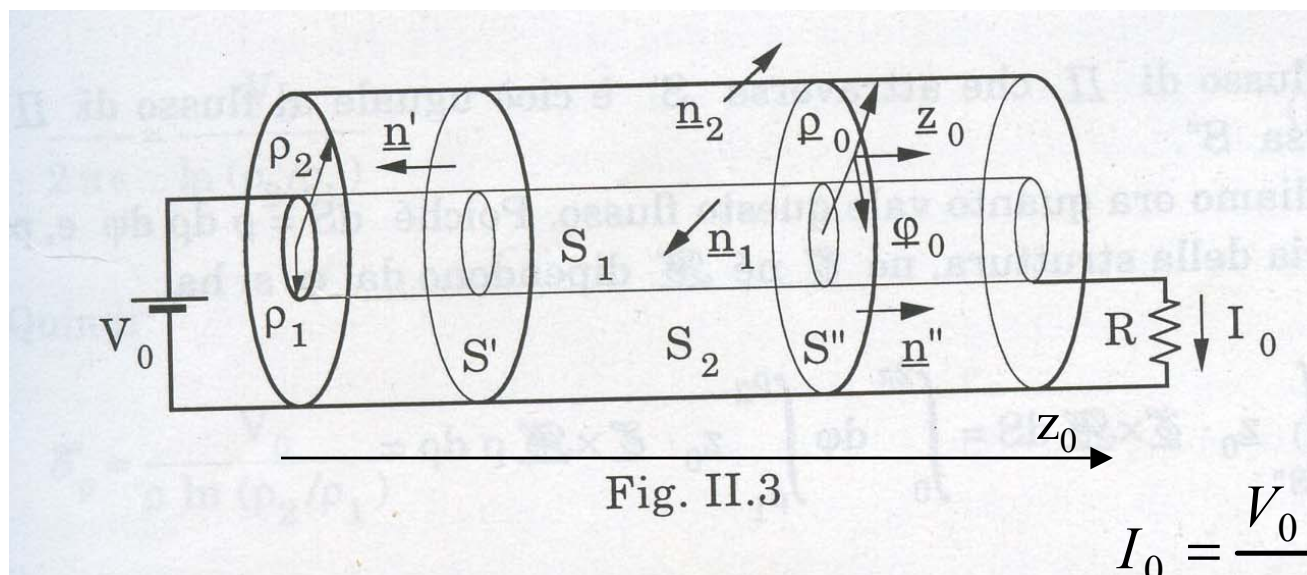
$$\underline{\mathbf{A}}(t) = \text{Re}[(3\mathbf{x}_0 + 4\mathbf{y}_0 + 5j\mathbf{z}_0)e^{j\omega t}] = (3\mathbf{x}_0 + 4\mathbf{y}_0)\cos(\omega t) - 5\mathbf{z}_0 \sin(\omega t)$$

$$|\underline{\mathbf{A}}(t)| = \sqrt{9\cos^2(\omega t) + 16\cos^2(\omega t) + 25\sin^2(\omega t)} = 5$$

4)

$$\mathbf{A}_x = 5 \quad \mathbf{A}_y = 12 \quad \mathbf{A}_z = 13j$$

Applicazione teorema di Poynting



$$I_0 = \frac{V_0}{R}$$

$$\int_{\tau} (p_i + p_{mi}) d\tau = 0 \quad \text{nella regione non esistono correnti impresse}$$

$$\int_{\tau} (p_H + p_E) d\tau = 0 \quad \text{problema statico}$$

$$\int_{\tau} p_c d\tau = 0 \quad \text{essendo } \sigma = 0$$

Applicazione teorema di Poynting

$$\oint_S \mathbf{n} \cdot \Pi dS = \oint_{S_t} \mathbf{n} \cdot (E \times H) dS = 0$$

$$S_t = S_1 \cup S_2 \cup S' \cup S''$$

$$\int_{S_1} \mathbf{n}_1 \cdot (E \times H) dS + \int_{S_2} \mathbf{n}_2 \cdot (E \times H) dS + \int_{S'} \mathbf{n}' \cdot (E \times H) dS + \int_{S''} \mathbf{n}'' \cdot (E \times H) dS = 0$$

$$\mathbf{n}_1 \times E \quad \mathbf{n}_2 \times E \quad \text{su } S_1 \text{ ed } S_2$$

$$-\int_{S'} \mathbf{z}_0 \cdot (E \times H) dS + \int_{S''} \mathbf{z}_0 \cdot (E \times H) dS = 0 \Rightarrow \int_{S'} \mathbf{z}_0 \cdot (E \times H) dS = \int_{S''} \mathbf{z}_0 \cdot (E \times H) dS$$

$$dS = \rho d\rho d\varphi$$

$$\int_{S''} \mathbf{z}_0 \cdot (E \times H) dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \mathbf{z}_0 \cdot (E \times H) \rho d\rho = 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \mathbf{z}_0 \cdot (E \times H) \rho d\rho$$

Applicazione teorema di Poynting

per il campo elettrico

$$\mathbf{E} = E_\rho \mathbf{\rho}_0 = -\nabla V = -\mathbf{\rho}_0 \frac{\partial V}{\partial \rho} \quad \text{per il teorema di Gauss}$$

$$2\pi\rho E_\rho = \frac{\lambda}{\varepsilon} \quad \text{↘}$$

$$E_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\rho\varepsilon} = -\frac{\partial V}{\partial \rho}$$

λ : carica per unità di lunghezza distribuita sulla superficie del conduttore interno

$$V_0 = V_1 - V_2 = \int_{\rho_1}^{\rho_2} E_\rho d\rho = \int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho = - \int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{\lambda}{2\pi\rho\varepsilon} d\rho = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} (\ln \rho_2 - \ln \rho_1) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

$$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} = \frac{V_0}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad \Rightarrow \quad E_\rho = \frac{V_0}{\rho \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

per il campo magnetico

$$\mathbf{H} = H_\varphi \boldsymbol{\varphi}_0 \quad \text{tangenziale rispetto ad una circonferenza } \rho=\text{cost}$$

Applicazione teorema di Poynting

per la legge della circuitazione di Ampere

$$\oint_s \mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{H} ds = \int_0^{2\pi} H_\varphi \rho d\varphi = 2\pi H_\varphi \rho = I_0 \quad H_\varphi = \frac{I_0}{2\pi\rho}$$

In definitiva:

$$\int_{S''} \mathbf{z}_0 \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dS = 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \mathbf{z}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}_0 \frac{V_0}{\rho \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \times \varphi_0 \frac{I_0}{2\pi\rho} \rho d\rho$$

$$= \frac{V_0 I_0}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho} = V_0 I_0$$

Potenza fornita al carico R dal generatore di tensione.

La potenza dissipata sul carico è pari alla potenza trasmessa attraverso il dielettrico.

La trasmissione di energia dal generatore al carico avviene attraverso il dielettrico e non attraverso i conduttori del cavo.

Funzioni d'onda in regime sinusoidale

In generale le soluzioni delle equazioni dei campi monocromatici saranno dei vettori con componenti del tipo:

$$\Psi = \Psi_0 e^{j\varphi} = \Psi_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

L'ampiezza e la fase sono funzione della
posizione $\Psi_0 = \Psi_0(r), \varphi = \varphi(r)$

Rappresentano onde che si propagano -> *funzioni d'onda*

I luoghi dei punti $\underline{r}$ che soddisfano equazioni del tipo $\varphi(\underline{r}) = \text{cost}$ *superfici equifase*

Le oscillazioni di Ψ avvengono in fase

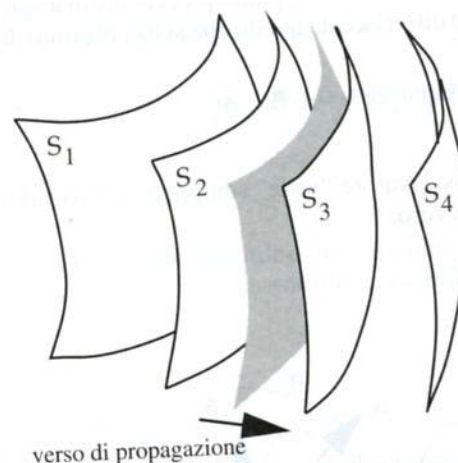


Figura 11.1

Funzioni d'onda in regime sinusoidale

I luoghi dei punti $\underline{\mathbf{r}}$ che soddisfano equazioni del tipo $\omega \mathbf{t} + \varphi(\underline{\mathbf{r}}) = \text{cost}$ fase istantanea
fronte d'onda

All'istante t la superficie $\omega \mathbf{t} + \varphi(\underline{\mathbf{r}}) = \text{cost}$ coincide con una sup. equifase, all'istante successivo essa coincide con una sup. cui compete un valore decrescente della fase.

Il moto dei fronti d'onda costituisce ciò che si intende per “*propagazione*” di un'onda monocromatica

Nei casi particolari in cui le sup. equifase ed i fronti d'onda sono piani, sfere, cilindri, l'onda viene detta piana, sferica, cilindrica.

Il vettore :

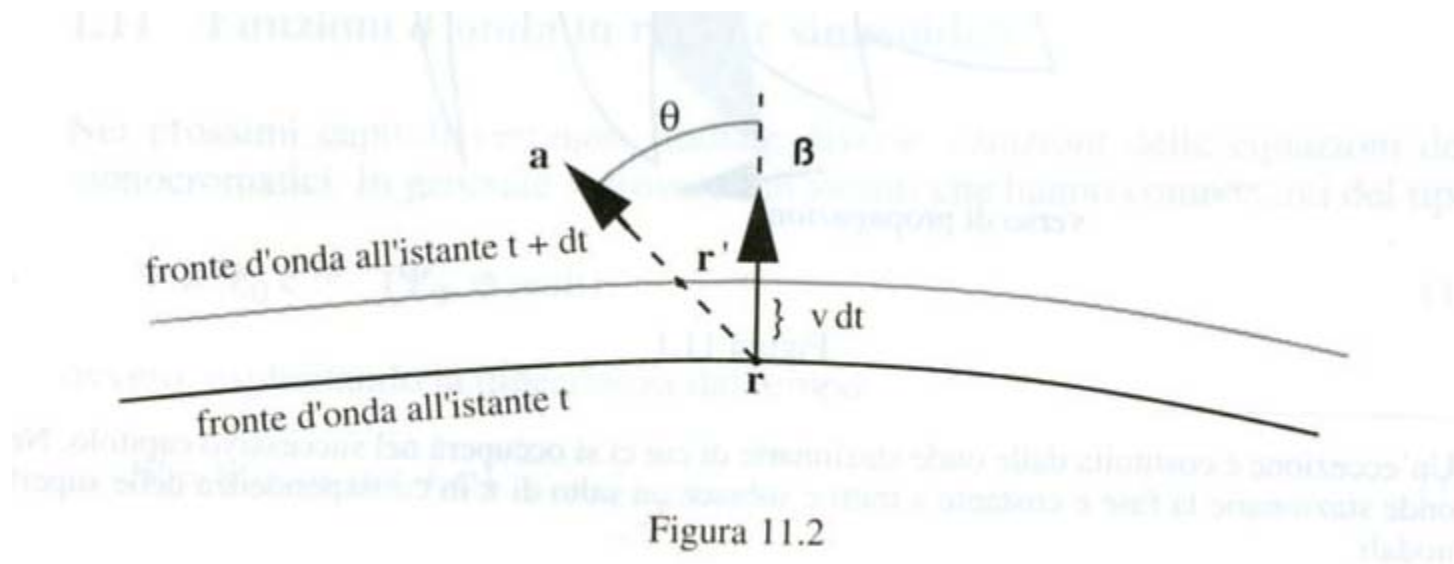
$$\boldsymbol{\beta} = -\nabla \varphi \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right]$$

Vettore d'onda

perpendicolare alla sup. equifase e orientato nel verso della propagazione

Funzioni d'onda in regime sinusoidale

Supponiamo che un osservatore voglia seguire un fronte d'onda muovendosi nella direzione di un versore $\underline{a}$ partendo dal punto r . La velocità v_a con cui l'osservatore dovrebbe muoversi si chiama **velocità di fase** nella direzione a



$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial a} (v_a dt) = \mathbf{a} \cdot \nabla \varphi v_a dt = -\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta} v_a dt$$

L'osservatore d'altro canto vede sempre lo stesso valore di fase istantanea

$$d(\varphi + \omega t) = 0 \Rightarrow d\varphi = -\omega dt$$

Funzioni d'onda in regime sinusoidale

$$v_a = \frac{\omega}{\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta}} = \frac{v}{\cos \theta} \quad \mathbf{v} = \frac{\omega}{\boldsymbol{\beta}}$$

velocità di fase

*velocità di fase nella direzione
del vettore d'onda*

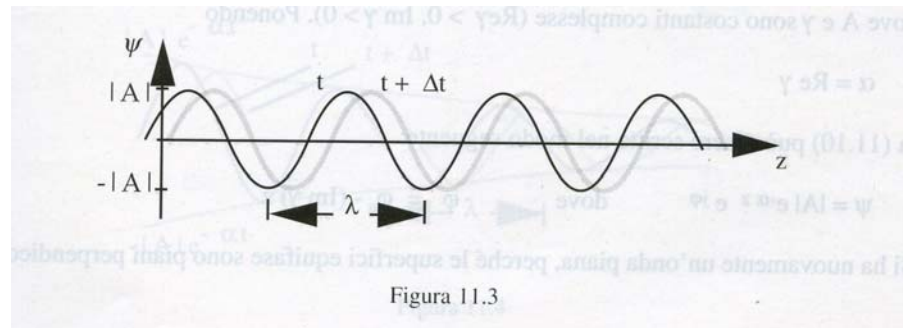
Esempio 1

$$\Psi = Ae^{-jkz} \quad \text{se indichiamo con } \phi_a \text{ l'argomento di } A \text{ si ha} \quad \varphi = \varphi_a - kz$$

le sup. equifase sono piani perpendicolari all'asse z

$$\boldsymbol{\beta} = -\nabla(\varphi_a - kz) = \nabla(kz) = k\mathbf{z}_0 \quad \text{Onda piana che si propaga nel verso positivo delle } z$$

$$\beta = k \quad v = \frac{\omega}{k}$$



Funzioni d'onda in regime sinusoidale

Due piani equifase cui competono valori di fase che differiscono di 2π sono separati da una distanza fissa (lunghezza d'onda)

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \qquad \lambda = \frac{v}{f} = vT$$

*L'ampiezza delle oscillazioni è identica in tutti i punti di un piano equifase:
onda piana “uniforme”*

Esempio 2

$$\Psi = Ae^{jkz}$$

Esempio 3

$$\Psi = Ae^{-\gamma z} \qquad \text{dove } A \text{ e } \gamma \text{ sono complesse}$$

$$\alpha = \operatorname{Re}[\gamma] \qquad \Psi = |A|e^{-\alpha z}e^{j\varphi} \qquad \varphi = \varphi_a - \operatorname{Im}[\gamma]z$$

Abbiamo un'onda piana perché le sup. equifase sono perpendicolari all'asse z . L'onda è uniforme

Funzioni d'onda in regime sinusoidale

L'ampiezza delle oscillazioni si attenua con legge esponenziale nel verso di propagazione

$$\frac{|\Psi(z)|^2}{|\Psi(z+d)|^2} = \frac{e^{-2\alpha z}}{e^{-2\alpha(z+d)}} = e^{2\alpha d}$$

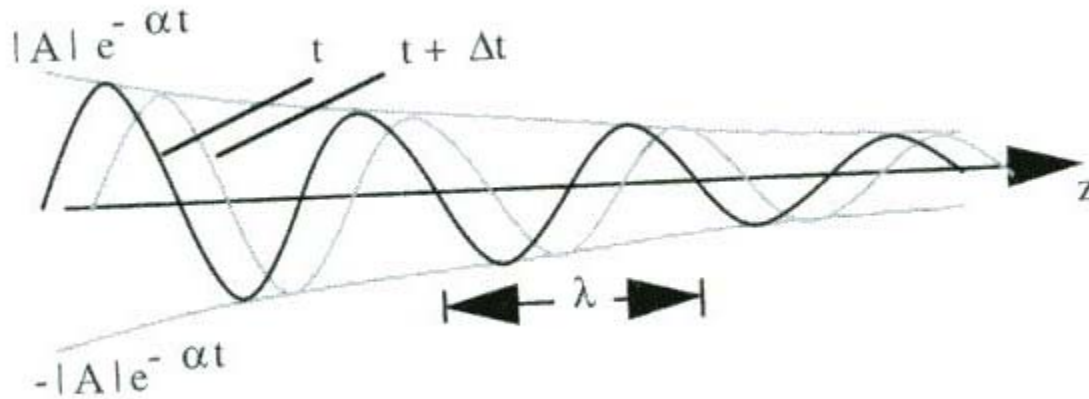


Figura 11.4

Funzioni d'onda in regime sinusoidale

Esempio 4

$$\Psi = A(\theta, \varphi) \frac{e^{-jkr}}{r}$$

Le superfici equifase sono i luoghi dei punti $kr = \text{cost}$ $\rightarrow$ superfici sferiche

