Argomento 1

- Lezione 1
- Lezione 2

Francesca Apollonio

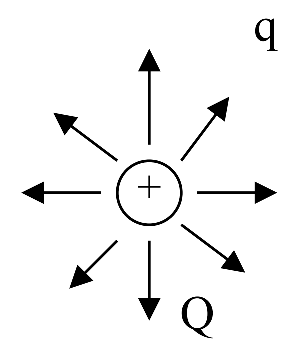
Dipartimento Ingegneria Elettronica

E-mail: apollonio@die.uniroma1.it

Campo elettrostatico

Generato da cariche che non variano nel tempo

Legge di Coulomb $\mathbf{F} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qq}{r^2}\mathbf{r_0}$ [N]



La forza di Coulomb è centrale e quindi conservativa -> si può introdurre una funzione energia potenziale

---

Energia potenziale $\mathrm{U}(r) = -\int_{P1}^{P2} F \cdot dl + \cos t = -\int_{\infty}^{r} \dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}dr = \dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}$ [eV]

[1 eV=1.6 10E-19 Joule]

Campo elettrico $\mathbf{E_0} = \lim_{q\to 0}\dfrac{\mathbf{F}}{q}$ [N/C=V/m]

Campo vettoriale (linee di forza)

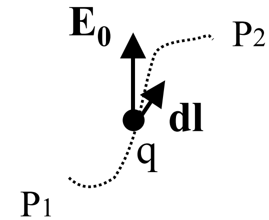
apollonio@die.uniroma1.it

Proprietà del campo elettrico

1.

Circuitazione di E_0

$$\Phi_{21} = \frac{L}{q} = -\int_{P1}^{P2} \mathbf{E_0} \cdot \mathbf{dl}$$



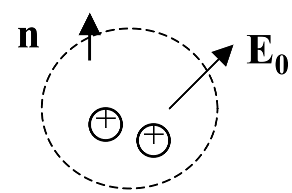
$$\oint \mathbf{E_0} \cdot \mathbf{dl} = 0$$

Potenziale elettrostatico

2.

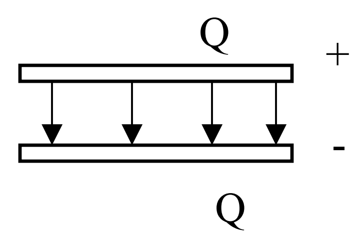
$$\Phi(\mathbf{E_0}) = \int_S \mathbf{E_0} \cdot \mathbf{n}\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho\, dV = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Flusso del campo -> Legge di Gauss



capacità dei conduttori

$$C = \frac{Q}{(V_1 - V_2)}$$



apollonio@die.uniroma1.it

Campo magnetostatico

Generato da correnti che non variano nel tempo

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Determinazione del campo di induzione magnetica generato nello spazio da una distribuzione di cariche in moto

Carica in moto

$$\mathbf{B_0} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

Vettore induzione magnetica

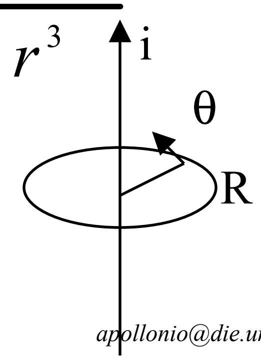
$$\left[\frac{weber}{m^2}\right]$$

Circuito percorso da corrente (I° formula di Laplace)

$$\mathbf{dB_0} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\mathbf{dl} \times \mathbf{r}}{r^3} \Rightarrow \mathbf{B_0} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C i \frac{\mathbf{dl} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

$$\mathbf{B_0} = \mu_0 \frac{i}{2\pi R}$$

Legge di Biot-Savart



apollonio@die.uniroma1.it

Legge di Lorentz $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{v} \times \mathbf{B_0}\right)$ [N] $\left[\dfrac{forza}{carica\ velocità}\right] = \left[\dfrac{ddp\ tempo}{area}\right] \Rightarrow \left[\dfrac{weber}{m^2}\right]$

Conduttore percorso da corrente (II° formula di Laplace)

$$\mathbf{dF} = i\mathbf{dl} \times \mathbf{B_0} \Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{i}\int \mathbf{dl} \times \mathbf{B_0}$$

---

il vettore campo magnetico $\mathbf{H} = \dfrac{\mathbf{B_0}}{\mu_0}$ [A/m]

Proprietà del campo magnetico

1. Circuitazione di B

(legge di Ampere)

$$\oint \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{dl} = \mu_0 i$$

La circuitazione non è nulla!!

2. Flusso di B attraverso una sup. chiusa

$$\int_S \mathbf{B_0} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$$

Il flusso è nullo -> non esistono sorgenti puntiformi

apollonio@die.uniroma1.it

Riepilogo

Campo elettrostatico: irrotazionale, non solenoidale (sorgenti puntiformi)

Campo magnetostatico: non irrotazionale, solenoidale (assenza di sorgenti puntiformi)

Grandezze fondamentali dell'elettromagnetismo

J.C. Maxwell

Il "campo elettromagnetico" è quel particolare stato di sollecitazione prodotto nell'ambiente dall'interazione a distanza tra corpi carichi, polarizzati o percorsi da corrente

vettori

$$E = E(\mathrm{r},t) \quad \textit{campo elettrico} \quad [V/m]$$

$$H = H(\mathrm{r},t) \quad \textit{campo magnetico} \quad [A/m]$$

$$D = D(\mathrm{r},t) \quad \textit{spostamento elettrico} \quad [C/m^2]$$

$$B = B(\mathrm{r},t) \quad \textit{induzione magnetica} \quad [Wb/m^2]$$

$$J = J(\mathrm{r},t) \quad \textit{densità di corrente elettrica} \quad [A/m^2]$$

scalare

$$\rho = \rho(\mathrm{r},t) \quad \textit{densità di carica elettrica} \quad [C/m^3]$$

apollonio@die.uniroma1.it

Operatori differenziali (1)

- Data una funzione scalare di punto $\Psi(r)$

Gradiente della funzione scalare → vettore

$$grad\Psi = \mathbf{x_0}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \mathbf{y_0}\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \mathbf{z_0}\frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

- Data una funzione vettoriale di punto $\mathbf{A}(r)$

Divergenza della funzione vettoriale → scalare

$$div\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}$$

Rotore della funzione vettoriale → vettore

$$rot\mathbf{A} = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} =$$

$$\mathbf{x_0}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \mathbf{y_0}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \mathbf{z_0}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

Operatori differenziali (2)

Operatore nabla ∇

$$\nabla[] = \boldsymbol{x_0}\frac{\partial[]}{\partial x} + \boldsymbol{y_0}\frac{\partial[]}{\partial y} + \boldsymbol{z_0}\frac{\partial[]}{\partial z}$$

Gradiente di uno scalare

$$\nabla\Phi = \mathbf{x_0}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \mathbf{y_0}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \mathbf{z_0}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

Divergenza di un vettore

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

rotore di un vettore

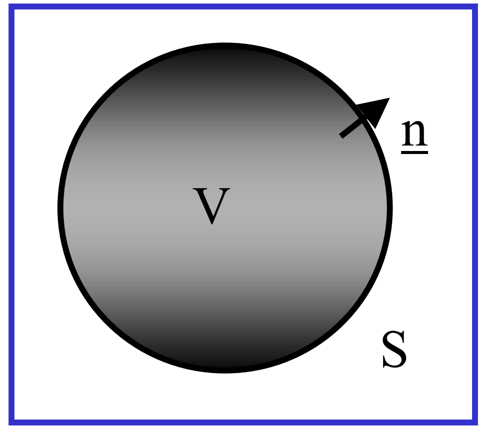
$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

apollonio@die.uniroma1.it

Proprietà integrali dell'operatore ∇

Formula di Green

$$\int_V \nabla[\;]\,dV = \oint_S \mathbf{n}[\;]\,dS$$



Ne discende:

1) Teorema del gradiente

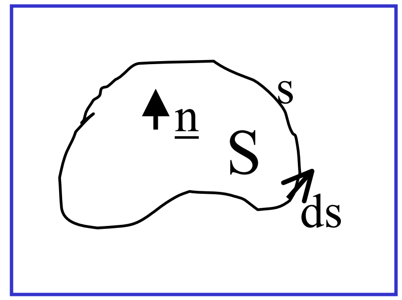
$$\int_V \nabla \Phi\, dV = \oint_s \mathbf{n}\, \Phi\, dS$$

2) Teorema della divergenza

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = \oint_s \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}\, dS$$

3) Teorema del rotore

$$\int_V \nabla \times \mathbf{A}\, dV = \oint_s \mathbf{n} \times \mathbf{A}\, dS$$



Teorema di Stokes (o della circuitazione)

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_s \mathbf{A} \cdot \mathbf{ds}$$

apollonio@die.uniroma1.it

Analisi nel dominio del tempo

Nota

Nel libro Gerosa – Lampariello le grandezze nel dominio del tempo sono espresse con il carattere ***MAIUSCOLO CORSIVO***

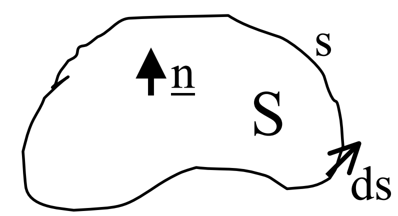
apollonio@die.uniroma1.it

Leggi fondamentali dell'elettromagnetismo

1) Legge dell'induzione di Faraday-Neumann

$$emf = \oint_s E \cdot \mathbf{ds} = -\frac{d}{dt}\phi(B)$$

$$\oint_s E \cdot \mathbf{ds} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{n} \cdot B \, dS$$



teorema di Stokes (della circuitazione)

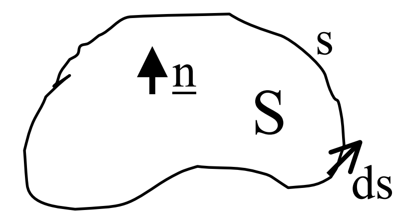
$$\int_S \nabla \times E \cdot \mathrm{n} \, dS = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \mathrm{n} \, dS \qquad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Leggi fondamentali dell'elettromagnetismo

2) Legge della circuitazione di Ampere

I_c

$$\oint_s H\cdot ds = \int_S \mathbf{n}\cdot J\, dS + \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{n}\cdot D\, dS$$



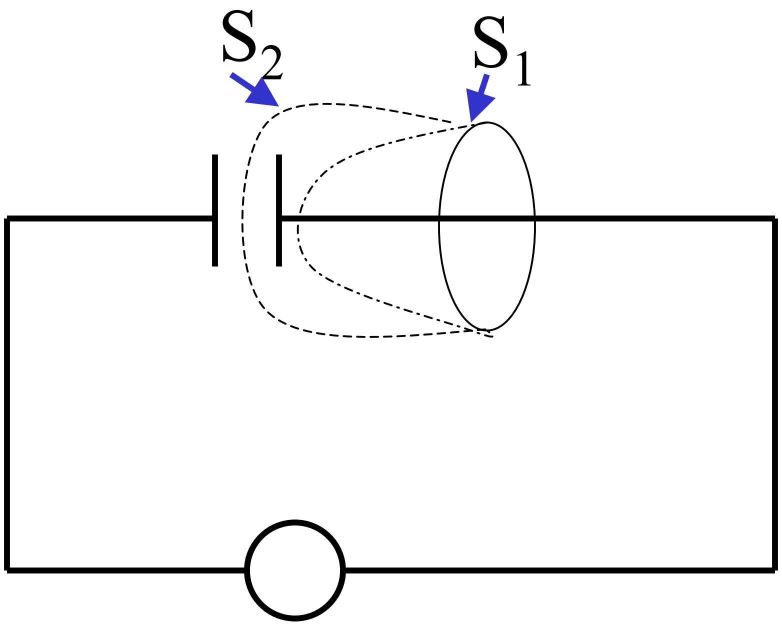
teorema di Stokes (della circuitazione)

$$\int_S \nabla\times H\cdot \mathrm{n}\, dS = \underbrace{\int_S J\cdot \mathrm{n}\, dS}_{\textit{Corrente di conduzione}} + \underbrace{\int_S \frac{\partial D}{\partial t}\cdot \mathrm{n}\, dS}_{\textit{Corrente di spostamento}}$$

$$\nabla\times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

apollonio@die.uniroma1.it

Esempio: corrente di spostamento

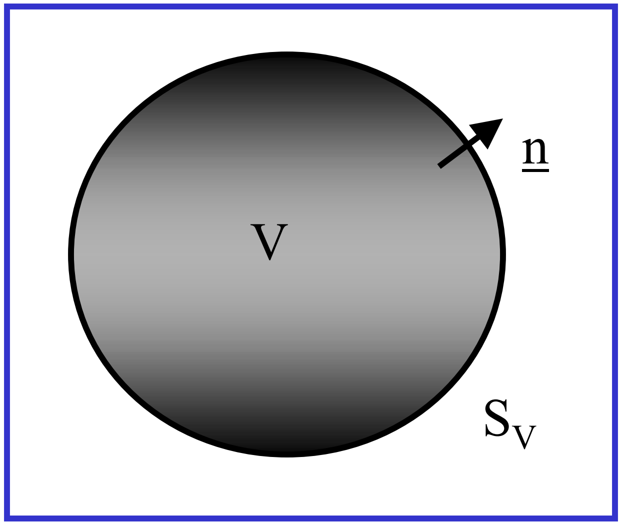


$$J_s = \frac{\partial D}{\partial t}$$

densità di corrente di spostamento

Leggi fondamentali dell'elettromagnetismo

3) Legge di conservazione della carica elettrica



$$\int_{S_V} J \cdot \mathbf{n}\, dS_V = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV$$

$$\int_V \nabla \cdot J\, d\tau = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau$$

teorema della divergenza

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

apollonio@die.uniroma1.it

Leggi fondamentali dell'elettromagnetismo

Relazioni integrali (macroscopiche)

$$\oint_s E \cdot \mathbf{ds} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{n} \cdot B\, dS$$

$$\oint_s H \cdot \mathbf{ds} = \int_S \mathbf{n} \cdot J\, dS + \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{n} \cdot D\, dS$$

$$\int_{S_V} J \cdot \mathrm{n}\, dS_V = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV$$

Stokes $\Rightarrow$

Relazioni differenziali (locali)

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} + J$$

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Equazioni di Maxwell

Relazioni **indipendenti**

apollonio@die.uniroma1.it

Leggi fondamentali dell'elettromagnetismo

Relazioni differenziali

$$\nabla \cdot (\nabla \times E) = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial B}{\partial \mathbf{t}}\right) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}(\nabla \cdot B) = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times H) = \nabla \cdot J + \nabla \cdot \left(\frac{\partial D}{\partial \mathbf{t}}\right) =$$

$$= \nabla \cdot J + \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}(\nabla \cdot D) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}(\nabla \cdot D - \rho) = 0$$

$$\nabla \cdot D = \rho$$

divergenza

Relazioni integrali

$$\oint_S \mathbf{n} \cdot B \, dS = 0$$

$$\oint_S \mathbf{n} \cdot D \, dS = \int_V \rho \, dV$$

Relazioni **dipendenti**

apollonio@die.uniroma1.it

Principio di dualità

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} + J$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \cdot D = \rho$$

Introduciamo una densità di corrente magnetica ed una densità di carica magnetica fittizie

$$J_m \quad \left(\frac{V}{m^2}\right)$$

$$\rho_m \quad \left(\frac{Wb}{m^3}\right)$$

$$\nabla \times E = -J_m - \frac{\partial B}{\partial t} \qquad \nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} + J \qquad \nabla \cdot J_m = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot B = \rho_m$$

$$\nabla \cdot D = \rho$$

$$E \rightarrow H \qquad H \rightarrow -E$$

$$D \rightarrow B \qquad B \rightarrow -D$$

$$J \rightarrow J_m \qquad J_m \rightarrow -J$$

$$\rho \rightarrow \rho_m \qquad \rho_m \rightarrow \rho$$

apollonio@die.uniroma1.it

Grandezze impresse

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} + J$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \cdot D = \rho$$

Termini a II membro:

Densità di corrente magnetica
Densità di corrente elettrica

Posso avere due tipi di problemi:

1) *Tutti gli elem. a II° membro sono incogniti. Eq. Omogenee. Le origini che producono il campo sono poste all'esterno della regione di interesse*
2) *Qualche termine può essere assegnato in tutto o in parte-> è presente un termine noto che viene chiamato come <u>densità di corrente magnetica</u> impressa o <u>densità di corrente elettrica impressa</u>*

$$\nabla \times E = -J_{mi} - \frac{\partial B}{\partial t} \qquad \nabla \cdot D = \rho_i + \rho \qquad \nabla \cdot (J_i + J) = -\frac{\partial}{\partial t}(\rho_i + \rho)$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} + J + J_i \qquad \nabla \cdot B = \rho_{mi} \qquad \nabla \cdot J_{mi} = -\frac{\partial \rho_{mi}}{\partial t}$$

apollonio@die.uniroma1.it

Relazioni indipendenti per i problemi EM

Forma integrale:

$$\oint_s E \cdot \mathbf{ds} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{n} \cdot B\, dS$$

$$\oint_s H \cdot \mathbf{ds} = \int_S \mathbf{n} \cdot J\, dS + \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{n} \cdot D\, dS$$

$$\int_{S_V} J \cdot \mathrm{n}\, dS_V = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV$$

Forme differenziali:

1) Rappresentazione fisica

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial \mathbf{t}}$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial \mathbf{t}} + J$$

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

2) Rappresentazione 'duale'

$$\nabla \times E = -J_m - \frac{\partial B}{\partial \mathbf{t}}$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial \mathbf{t}} + J$$

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot J_m = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t}$$

3) Rappresentazione con 'termini impressi'

$$\nabla \times E = -J_{mi} - \frac{\partial B}{\partial \mathbf{t}}$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial \mathbf{t}} + J + J_i$$

$$\nabla \cdot (J_i + J) = -\frac{\partial}{\partial t}(\rho_i + \rho)$$

$$\nabla \cdot J_{mi} = -\frac{\partial \rho_{mi}}{\partial t}$$

apollonio@die.uniroma1.it

Analisi nel dominio della frequenza

Nota

Nel libro Gerosa – Lampariello le grandezze nel dominio della frequenza sono espresse con il carattere **MAIUSCOLO NORMALE**

apollonio@die.uniroma1.it

Regime sinusoidale – dominio della frequenza

Campi monocromatici ➡ In prima approx. tutte le applicazioni delle onde si basano su campi monocromatici, poi attraverso l'uso della trasf. di Fourier lo studio dei campi non monocromatici (periodici o aperiodici) si riconduce a quello delle componenti spettrali ciascuna delle quali oscilla sinusoidalmente.

Rappresentazione di grandezze sinusoidali attraverso quantità complesse

*Un generico campo vettoriale monocromatico **E** espresso attraverso le sue componenti cartesiane ha la seguente forma:*

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{t}) = \underline{\mathbf{x}}_\mathbf{0}\, E_{0x} \cos(\omega t + \varphi_x) + \underline{\mathbf{y}}_\mathbf{0}\, E_{0y} \cos(\omega t + \varphi_y) + \underline{\mathbf{z}}_0\, E_{0z} \cos(\omega t + \varphi_z) =$$

$$\mathrm{Re}\left[(\mathbf{x_0}\, E_{0x} e^{j\varphi_x} + \mathbf{y_0}\, E_{0y} e^{j\varphi_y} + \mathbf{z_0}\, E_{0z} e^{j\varphi_z}) e^{j\omega t} \right] = \mathrm{Re}\left[\mathbf{E}\, e^{j\omega t} \right]$$

Vettore a componenti complesse: fasori

$$E_x = E_{0x}\, e^{j\varphi_x} \qquad E_y = E_{0y}\, e^{j\varphi_y} \qquad E_z = E_{0z}\, e^{j\varphi_z}$$

$$\mathbf{E} = E_{0x}\, \underline{\mathbf{x}}_0 + E_{0y}\, \underline{\mathbf{y}}_0 + E_{0z}\, \underline{\mathbf{z}}_0$$

In generale:

$$\boldsymbol{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int^{+\infty} \boldsymbol{E}(\mathrm{t}) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega \mathrm{t}} \mathrm{d}\omega$$

➡ Trasformata di Fourier

apollonio@die.uniroma1.it

Regime sinusoidale

Problemi

2.1.1 Determinare il fasore corrispondente alle funzioni sinusoidali

$$\mathcal{F} = 6\cos(\omega t + \pi/4) \qquad \mathcal{G} = 4\sin(\omega t + \pi/4) \qquad \mathcal{A} = \mathcal{F} + \mathcal{G}$$

Determinare $\mathcal{A}$ nella forma (2.1).

2.1.2 Determinare il fasore corrispondente al vettore sinusoidale

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = 3\,\hat{\boldsymbol{x}}\cos\omega t + 6\,\hat{\boldsymbol{y}}\cos(\omega t + \pi/6) + \hat{\boldsymbol{z}}\sin\omega t$$

2.1.3 Rappresentare i vettori sinusoidali corrispondenti ai fasori

$$\boldsymbol{F} = 3\,\hat{\boldsymbol{x}} + 3\,j\,\hat{\boldsymbol{y}} \qquad \boldsymbol{G} = j\boldsymbol{F}$$

Grandezze fondamentali dell'elettromagnetismo

vettori

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) \quad \textit{campo elettrico} \quad [V/m]$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r},\omega) \quad \textit{campo magnetico} \quad [A/m]$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{r},\omega) \quad \textit{spostamento elettrico} \quad [C/m^2]$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r},\omega) \quad \textit{induzione magnetica} \quad [Wb/m^2]$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r},\omega) \quad \textit{densità di corrente elettrica} \quad [A/m^2]$$

scalare

$$\rho = \rho(\mathbf{r},\omega) \quad \textit{densità di carica elettrica} \quad [C/m^3]$$

apollonio@die.uniroma1.it

Regime sinusoidale – dominio della frequenza

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial \mathrm{t}} \qquad \nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial \mathrm{t}} + J$$

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad \nabla \cdot D = \rho$$

Equazioni di Maxwell (t)

$$\nabla \times \mathrm{Re}\left[\mathbf{E}\, e^{j\omega t}\right] = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}\, \mathrm{Re}\left[\mathbf{B}\, e^{j\omega t}\right] \Rightarrow \mathrm{Re}\left[(\nabla \times \mathbf{E})\, e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[(-j\,\omega\,\mathbf{B})\, e^{j\omega t}\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -j\,\omega\,\mathbf{B}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow j\omega$$

apollonio@die.uniroma1.it

Regime sinusoidale – dominio della frequenza

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -j\omega \boldsymbol{B}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = j\omega \boldsymbol{D} + \boldsymbol{J}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

Equazioni di Maxwell (ω)

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega\,\rho$$

Equazione di continuità della corrente