

Argomento 11
Micaela Liberti
liberti@die.uniroma1.it

Def: RADIAZIONE

Lo studio della radiazione è la soluzione del problema EM costituito dal calcolo del campo indotto nello spazio illimitato da distribuzioni di correnti elettriche e magnetiche note (imprese). Lo studio di tale campo indica che la propagazione per onde è una proprietà di tale soluzione e che tali onde trasportano l'energia delle sorgenti all'infinito

**Eq di Maxwell ai rotori
+ mezzo L.S.O.I**

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}$$
$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} + J = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + J + J_i$$

L'accelerazione di carica
(densità di corrente variabile)
introduce un susseguirsi
causale di dipendenze e
variazioni che possono essere
formalizzate nella funzione
d'onda

I potenziali elettrodinamici

Campi monocromatici,
dominio della frequenza

$$\begin{aligned}\nabla \times A &= H\mu \\ E + j\omega A &= -\nabla V\end{aligned}$$

Divergenza
nulla

irrotazionale

$$\begin{aligned}\nabla^2 A + k^2 A &= -\mu J_i \\ \nabla^2 V + k^2 V &= \frac{-\rho_i}{\varepsilon}\end{aligned}$$

*Teorema di Helmholtz: un vettore
è univocamente determinato (a
meno di uno scalare) una volta
assegnati rotore e divergenza*



$$\nabla \bullet A = -j\omega\varepsilon\mu V$$

Condizione di Lorenz

$$A' = A + \nabla\Phi$$

Gauge di Lorenz

$$\text{dove } \Phi: \nabla^2\Phi + k^2\Phi = 0$$

Il problema deterministico per lo spazio libero

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{A}} + k^2 \underline{\mathbf{A}} = -\underline{\mathbf{J}}$$

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon_c = \omega^2 \mu \epsilon - j\omega \mu \sigma$$

*Equazione vettoriale
che corrisponde a tre
equazioni scalari*

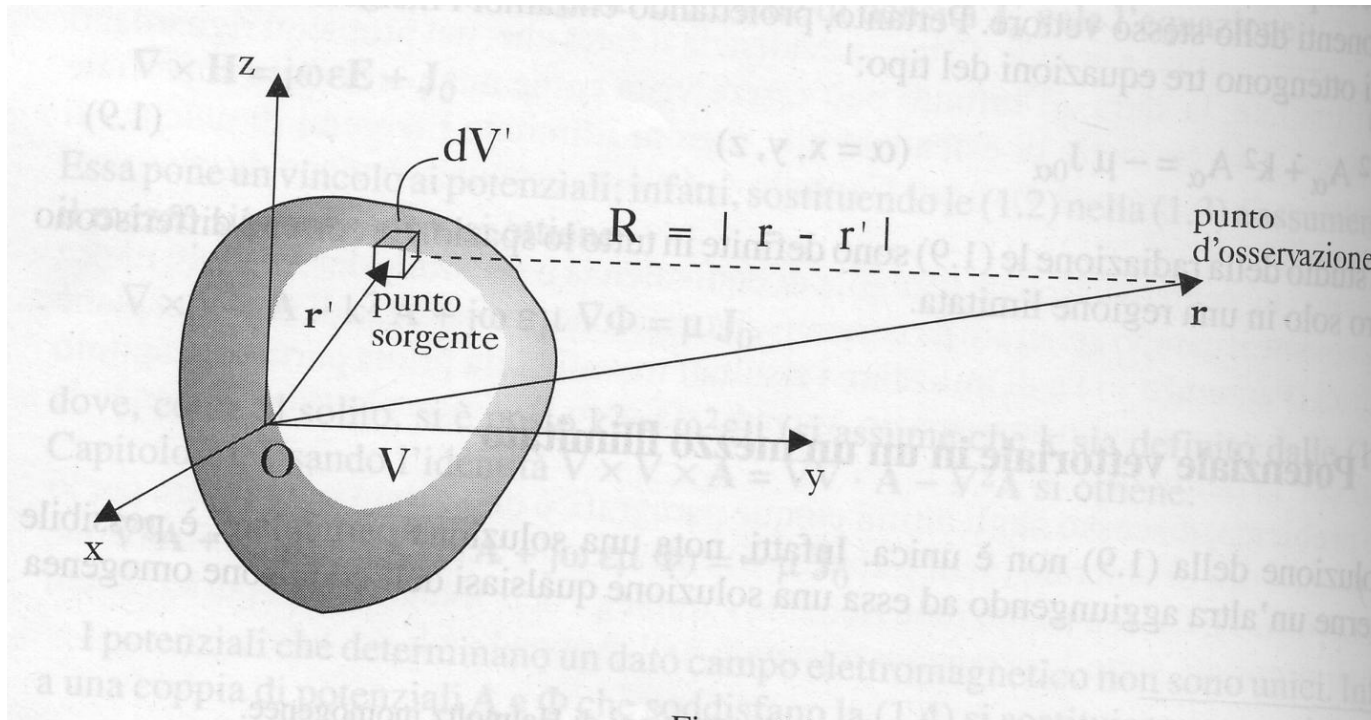
$$\nabla^2 A_s + k^2 A_s = -J_{is} \quad i = 1, 2, 3$$

*singola
equazione scalare*

Introducendo le espressioni per il potenziale vettore $\underline{\mathbf{A}}$ nelle seguenti espressioni si ottengono le componenti del campo elettromagnetico

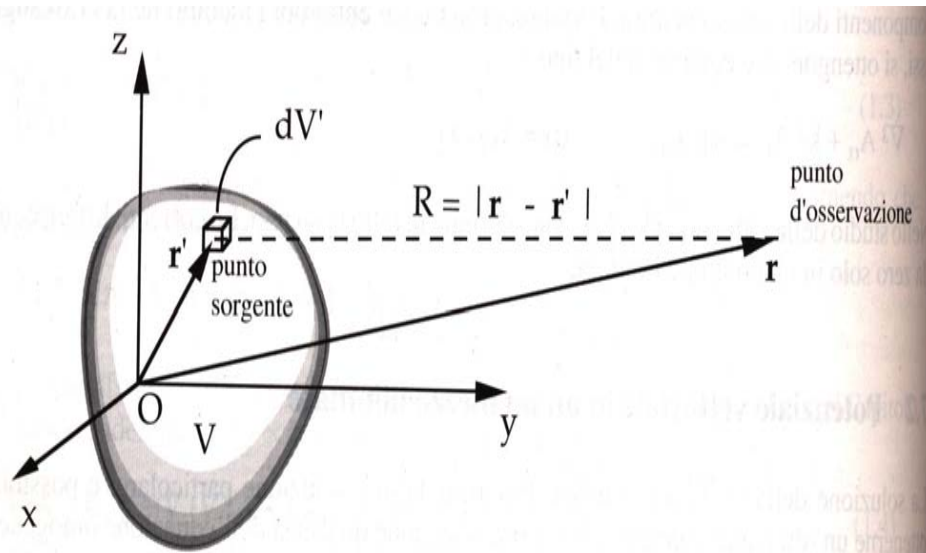
$$\underline{\mathbf{H}} = \nabla \times \underline{\mathbf{A}}$$

$$\underline{\mathbf{E}} = -j\omega \mu \underline{\mathbf{A}} + \frac{\nabla \nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}}{j\omega \epsilon_c}$$



$$A_s(\underline{r}) = \int_V J_{is}(\underline{r}') G(\underline{r}, \underline{r}') dV' = \int_V J_{is}(\underline{r}') \frac{e^{-jk|\underline{r} - \underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r} - \underline{r}'|} dV' \quad \text{soluzione per la singola componente } s$$

$$\underline{A}(\underline{r}) = \int_V \underline{J}_i(\underline{r}') \frac{e^{-jk|\underline{r} - \underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r} - \underline{r}'|} dV' \quad \text{soluzione vettoriale}$$



$$\frac{\nabla \times A}{\mu} = H$$

$$E = -\frac{\nabla \nabla \cdot A}{j\omega\epsilon\mu} - j\omega A$$

+ Cond. Radiazione

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |r A_s| = l$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left| \frac{\partial A_s}{\partial t} - jk A_s \right| = 0$$

$$A(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{e^{-jk|r-r'|}}{|r-r'|} J_0(r') dr'$$

A è ottenuto dunque come sovrapposizione di infiniti contributi del tipo:

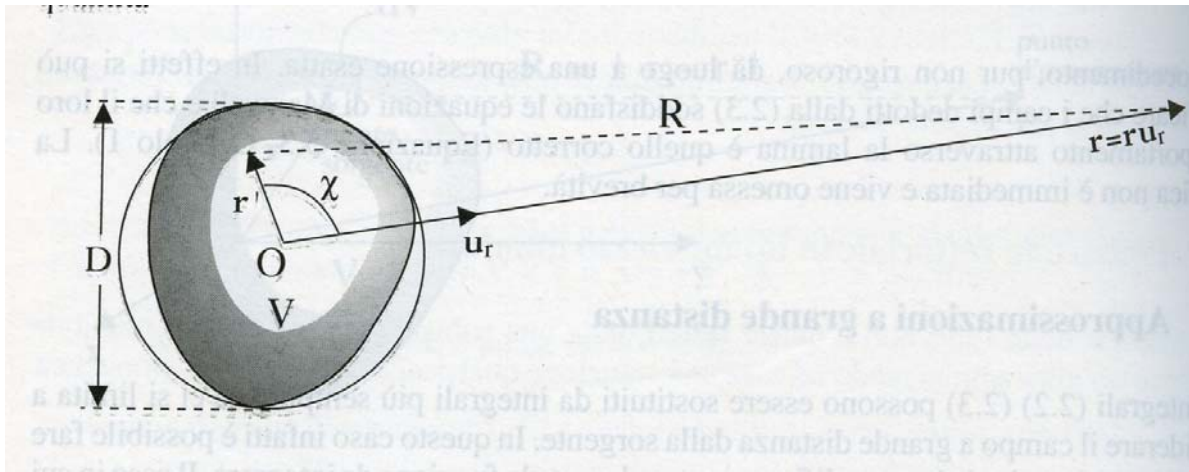
$$\underline{J}_i(\underline{r}') dV' \frac{e^{-jk|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} = \underline{J}_i(\underline{r}') dV' \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} = \underline{J}_i(\underline{r}') dV' \frac{e^{-k_R R} e^{-jk_J R}}{4\pi R}$$

Ciascun contributo elementare rappresenta un'onda sferica che si propaga dal punto sorgente verso l'infinito, con la stessa velocità di fase delle onde piane uniformi. La funzione d'onda ottenuta come sovrapposizione delle onde piane elementari, in generale, non è un'onda sferica né ha velocità di fase uguale in tutti i punti.

Se la sorgente non è distribuita su un volume ma è una corrente superficiale (lamina) Vale la seguente estrapolazione:

$$\underline{A}(\underline{r}) = \int_S \underline{J}_S(\underline{r}') \frac{e^{-jk|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} dS'$$

Approssimazioni a grande distanza



$$\underline{A}(\underline{r}) = \int_V \underline{J}_i(\underline{r}') \frac{e^{-jk|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} dV'$$



L'integrale che compare nella soluzione del potenziale vettore può essere sostituito da integrali più semplici se si considera il campo a grande distanza dalla sorgente:

- se il mezzo ha attenuazione nulla (vuoto) o trascurabile (aria) $\rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \chi} = r - r' \left(\cos \chi - \frac{r'}{r} \sin^2 \chi \right) = r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \left(\frac{r'}{r} \right) \cos \chi}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right) - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\chi} = 1 - \cos\chi\left(\frac{r'}{r}\right) + \frac{\sin^2\chi}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 + O\left\{\left(\frac{r'}{r}\right)^3\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = r - r' \left[\cos\chi - \left(\frac{r'}{2r}\right)\sin^2\chi + O\left\{\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right\} \right]$$

La distanza dalla sorgente si paragona con D , definito come il diametro della più piccola sfera che contiene la sorgente

$$\text{se } r \gg D \Rightarrow \frac{r'}{r} \ll 1 \quad \text{la distanza è "grande"}$$

Approssimazioni

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} \quad (1)$$

$$e^{-jkR} \approx e^{-jkr} e^{jkr' \cos\chi} \quad (2)$$

L'errore che si compie con l'approx $R \approx r$ non supera $D/2$, l'approx è migliore del 5% se

$$r > 10D$$

L'errore di fase che si compie nell'approx (2) è

$$\Delta = k\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \chi + r'^2} - k(r - r' \cos \chi)$$

Il max valore di Δ al variare di χ

$$\Delta_{\max} = k \frac{r'^2}{2r} \leq k \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2}{2r} = \pi \frac{D^2}{4\lambda r} \Rightarrow \frac{\pi}{8}$$

L'approx (2) diventa accettabile se

$$r > \frac{2D^2}{\lambda}$$

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} \quad (1)$$

$$e^{-jkR} \approx e^{-jkr} e^{jkr' \cos \chi} \quad (2)$$

$$r > \frac{2D^2}{\lambda}$$

Utilizzando queste approssimazioni nell'integrale

$$\underline{A}(\underline{r}) = \int_V \underline{J}_i(\underline{r}') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dV'$$

$$\frac{e^{-jkR}}{R} \cong \frac{e^{-jkr}}{r} e^{jkr' \cos \chi} = \frac{e^{-jkr}}{r} e^{jk \underline{r}' \cdot \underline{u}_r}$$

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \underline{N}$$

$$\underline{N} = \int_V \underline{J}_i(\underline{r}') e^{jk \underline{r}' \cdot \underline{u}_r} dV'$$

dove $\underline{N}$ è chiamato “vettore di radiazione”

Approssimazioni a grande distanza

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \underline{N}$$

$$\underline{N} = \int_V \underline{J}_i(\underline{r}') e^{jk \underline{r}' \cdot \underline{u}_r} dV'$$

dove $\underline{N}$ è chiamato “vettore di radiazione”

Questa approssimazione ha implicazioni notevoli:

per distanze abbastanza grandi per qualunque sorgente la soluzione dipende dalla distanza r tramite

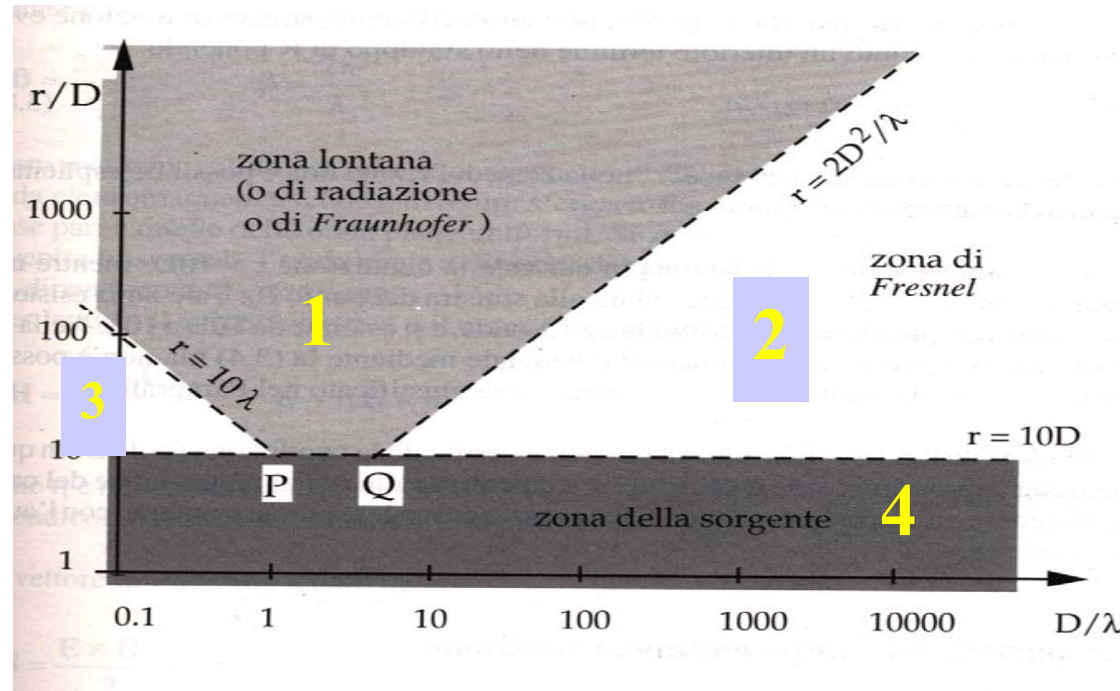
$$\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}$$

Dipende invece dalla forma della sorgente, dalla distribuzione di densità di corrente e dall'angolazione tramite un'operazione integrale rappresentata da $\underline{N}$ e non necessariamente univoca per ogni $\underline{J}(\underline{r})$

Esprimendo N in coordinate sferiche e considerando distanze r sufficientemente maggiori della lunghezza d'onda, si può considerare che il termine $1/\lambda r$ diventi prevalente sui termini $1/r^2$, λ/r^3 , quando si valutano divergenza e rotore della soluzione A per ottenere E e H s

$$H = -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} [u_\phi N_\theta - u_\theta N_\phi]$$
$$E = -j\eta \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} [u_\phi N_\phi + u_\theta N_\theta]$$

Approssimazioni a grande distanza



APPROSSIMAZIONI CAMPO LONTANO

$$\frac{1}{R} \cong \frac{1}{r}$$

$$e^{-jk|r-r'|} \cong e^{-jk(r-r' \cos \varphi)}$$

$$\frac{1}{\lambda r}$$

5% errore

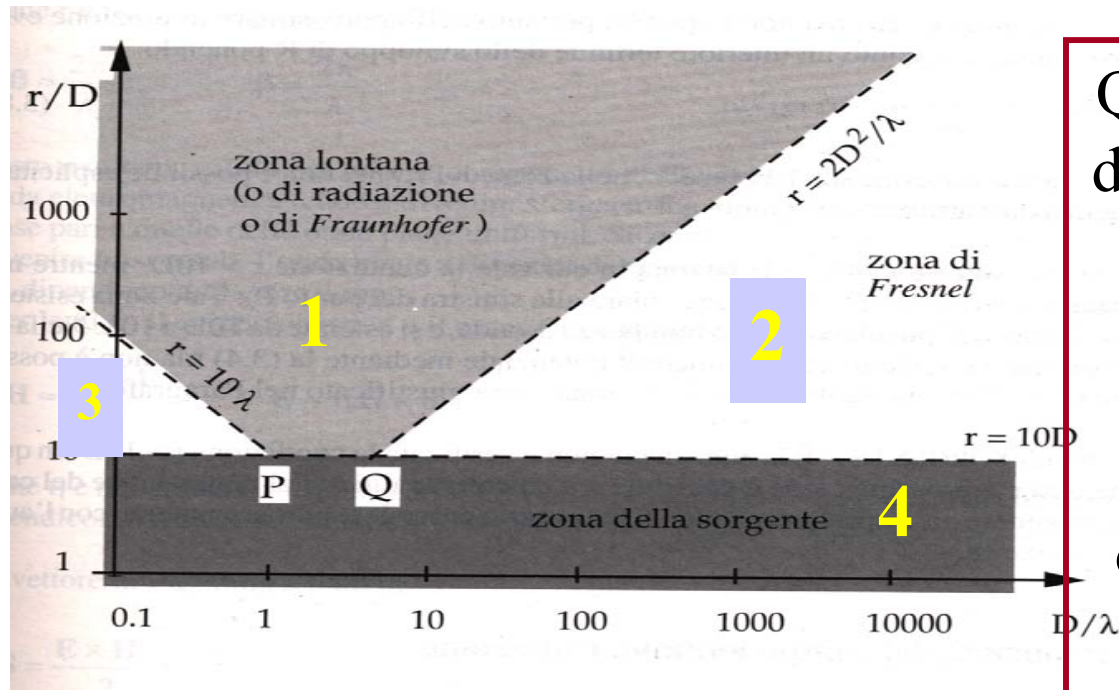
$\pi/8$ errore

prevalente

$$r > 10D$$

$$r > \frac{2D^2}{\lambda}$$

$$r > 10\lambda$$



Questo diagramma consente di modellizzare diverse zone di campo intorno alla sorgente in funzione delle dimensioni della sorgente stessa, della frequenza dell'onda e della posizione di osservazione

- 2:Fresnel: vale approx della distanza ma non vale approx fase, ossia non si puo trascurare la posizione dell'elemento infinitesimo di corrente, TIPICA SORGENTI GRANDI RISPETTO A λ (non esiste per $D/\lambda < 5$)
- 3:Campi reattivi:tipica delle piccole sorgenti, vale formulazione A ma non E e H: $1/r^2$ e λ/r^3 assumono importanza, DOMINANTE componente reattiva del vettore di Poynting (potenze di scambio)
- 4:Zona Sorgenti: non vale nessuna approx (soluzione tipicamente ottenuta con I metodi numerici)

Zona di campo lontano

Valgono tutte le approx, i campi E e H sono ortogonali tra loro e alla direzione di radiale. Inoltre il vettore d'onda indica che l'onda all'infinito tende ad avere velocità di fase pari alle onde piane


$$\beta = -\nabla(\text{fase}) = -\nabla(-kr + \text{Arg}(N_\theta)) = \frac{2\pi}{\lambda} u_r$$

Approx

$$E = -\frac{j\eta}{2\lambda r} e^{-jkr} (u_\phi N_\phi + u_\theta N_\theta)$$

$$H = -\frac{j}{2\lambda r} e^{-jkr} (u_\phi N_\theta - u_\theta N_\phi)$$

solo da J(r) e
forma sorgente

$$N = \int_{\tau} J(r') e^{jkr' \cos\vartheta} dr'$$

ONDA TEM in direzione radiale

$$E = \eta H \times u_r$$

$$H = u_r \times \frac{1}{\eta} E$$

Vettore di Poynting



$$S = \frac{\eta}{8\lambda r^2} (|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2) u_r = \frac{k(\theta, \varphi)}{r^2}$$

Pertanto: nella zona lontana il vettore di Poynting è reale e diretto radialmente nel verso centrifugo.

A GRANDE DISTANZA SI HA TRASPORTO DI ENERGIA VERSO L'INFINITO.

Mezzo senza perdite: Potenza trasmessa=potenza erogata

Si può valutare la potenza irradiata da una sorgente come flusso del vettore di Poynting attraverso una sfera di centro nell'origine e raggio infinito come

$$P = \oint S \cdot u_r dS = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} K(\theta, \varphi) d\varphi$$

Che stabilisce una relazione tra P e K

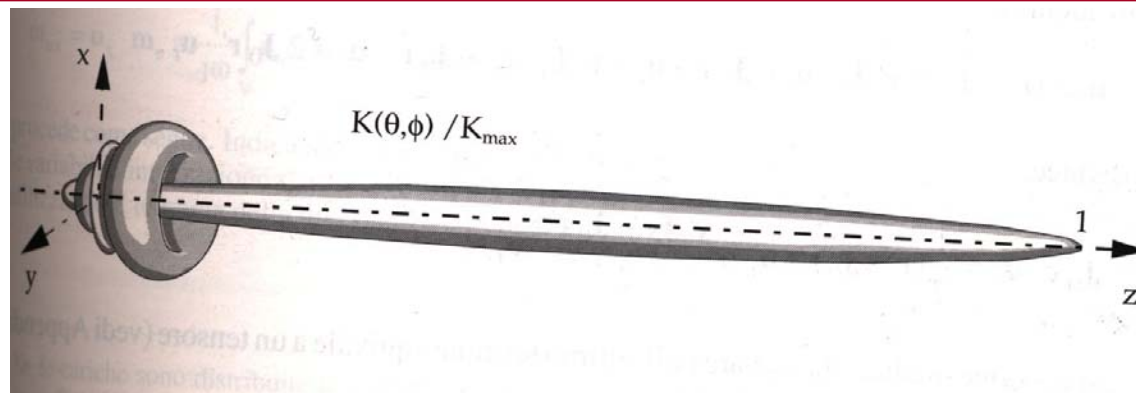
$$dP = S \cdot u_r dS = \frac{K}{r^2} dS = k d\Omega, \quad K = \frac{dP}{d\Omega}$$

Zona di campo lontano

K è l'intensità di potenza irradiata per unità di angolo solido. Il diagramma polare di K normalizzato rispetto al valore massimo assume il nome di

DIAGRAMMA DI RADIAZIONE

$$\frac{K(\theta, \phi)}{K_{\max}}$$



e definisco:

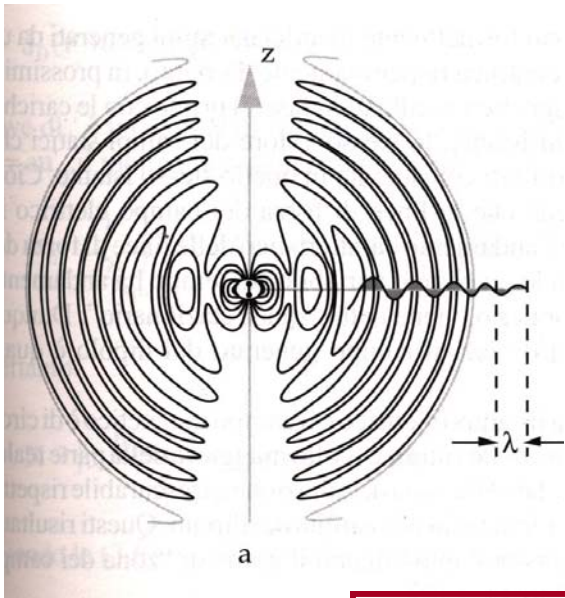
Direttività': $D = K_{\max} / K_{\text{medio}}(\text{radiatore isotropo})$, (guadagno spaziale di amplificazione)

Efficienza = $P_{\text{irr}} / P_{\text{gens}}$

Guadagno: efficienza * D * Diagramma radiazione

dipolo elementare:sorgente piccola

Dipolo corto: corrente I che fluisce tra due sferette di carica q e distanza l : $I=j\omega q$



Dipolo corto:

Per $r \gg \text{dim sorgente}$ il potenziale non dipende dai dettagli strutturali della sorgente. Da cui ne consegue che l'osservazione dell'onda irradiata da una sorgente monocromatica non fornisce informazioni strutturali ad un dettaglio più fine della lunghezza d'onda (diagnostica!!)

$$N = I l u_z$$

quindi

$$A = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} I l u_z = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} I l (u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta)$$

2.4.1. The Short Dipole

For the short dipole illustrated in Fig. 2-14, the length l is short compared with a wavelength ($l \ll \lambda$) and the diameter is small compared with its length. It is energized by a transmission line that does not radiate. Hence, for purposes of analysis the short dipole may be considered simply as a thin conductor of length l carrying a uniform current I . It can be shown (Jordan and Balmain, 1968) that the electric and magnetic fields from the dipole have only three components E_θ , E_ϕ , and H_ϕ in the spherical coordinate system (Fig. 2-15) and are given by

$$E_r = \frac{\eta I l e^{j(\omega t - \beta r)} \cos \theta}{2\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{j\beta r^3} \right) \quad (2.92)$$

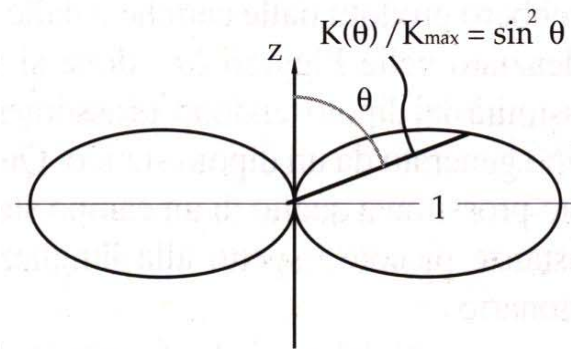
$$E_\theta = \frac{\eta I l e^{j(\omega t - \beta r)} \sin \theta}{4\pi} \left(\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{j\beta r^3} \right) \quad (2.93)$$

$$H_\phi = \frac{I l e^{j(\omega t - \beta r)} \sin \theta}{4\pi} \left(\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \quad (2.94)$$

The components E_ϕ , H_r , and H_θ are zero at all points.

$$K = \frac{\eta (lI)^2}{8 \lambda^2} \sin^2 \theta$$

$$P = \frac{\eta (lI)^2}{\lambda^2} \frac{\pi}{3}$$



Ma! $1/\lambda \ll 1$: in genere servono correnti abbastanza elevate!

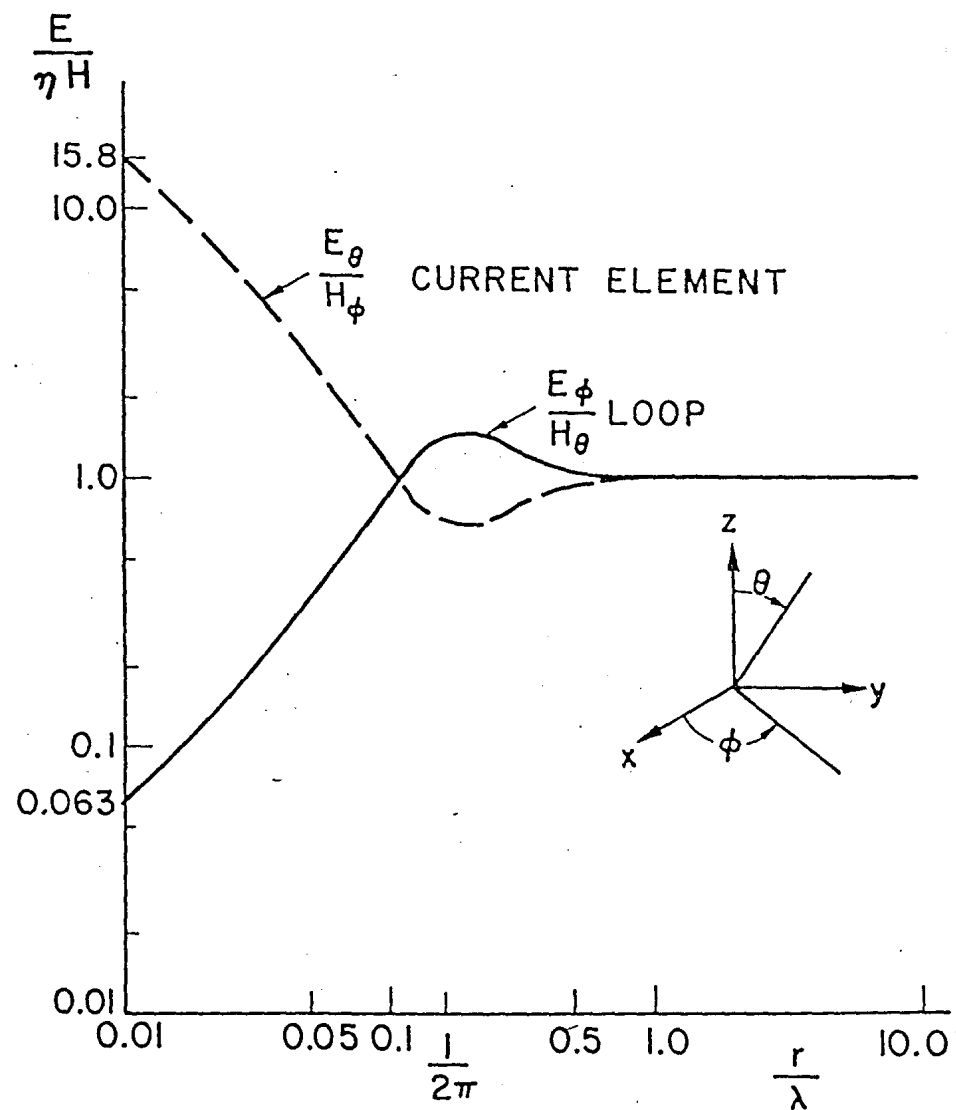
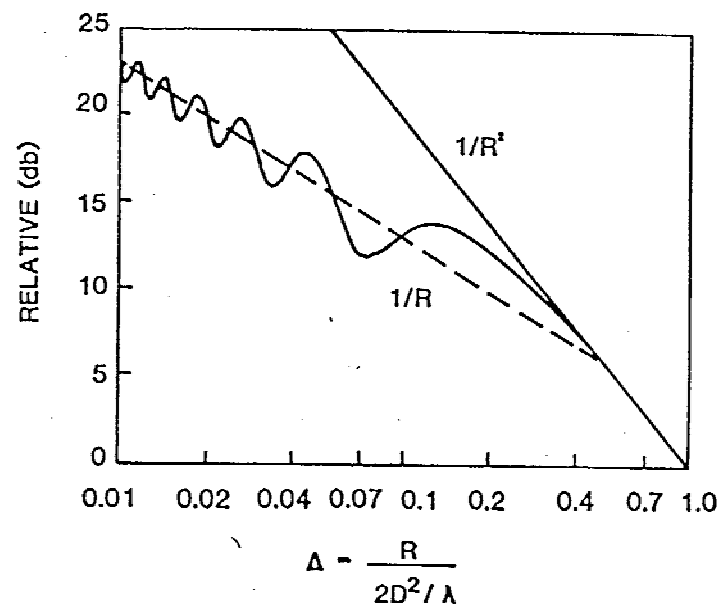


FIGURE 2. Ratio of E to H field (divided by wave impedance of free space $\eta = 377\Omega$) at $\theta = 90^\circ$: for electric current element at origin along z-axis and for electrically small loop centered at the origin in the x-y plane.

Zona reattiva

La densità di potenza nel campo vicino non è definita univocamente, poiché campo E e H variano da punto a punto e la distribuzione varia con la distanza dall'antenna,
Es per un antenna ad apertura quadrata



Moreover, they give average and maximum near-field power densities such that for

1. Square antenna with uniform field distribution:

$$P_d = 0.88P/A \text{ average} \quad (2.104)$$

$$P_d = 2.61P/A \text{ maximum} \quad (2.105)$$

2. Circular antenna with uniform field distribution:

$$P_d = 3.01P/A \text{ average} \quad (2.106)$$

$$P_d = 4.86P/A \text{ maximum} \quad (2.107)$$

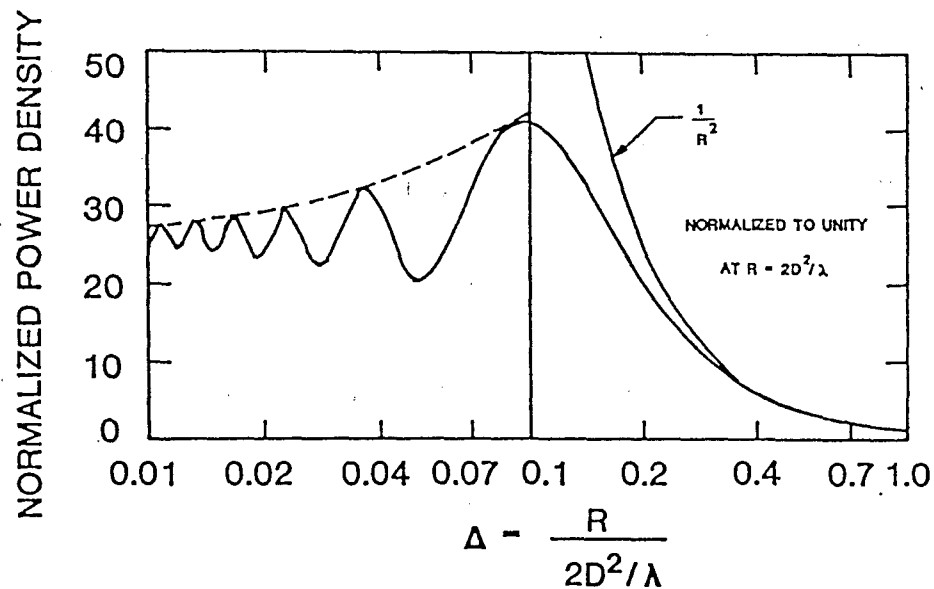


FIGURE 2-19. The on-axis power density of a tapered circular aperture. (From Hansen, 1964.)