

Argomento 3

lezione 5

Francesca Apollonio

Dipartimento Ingegneria Elettronica

E-mail: apollonio@die.uniroma1.it

Condizioni al contorno

dominio del tempo

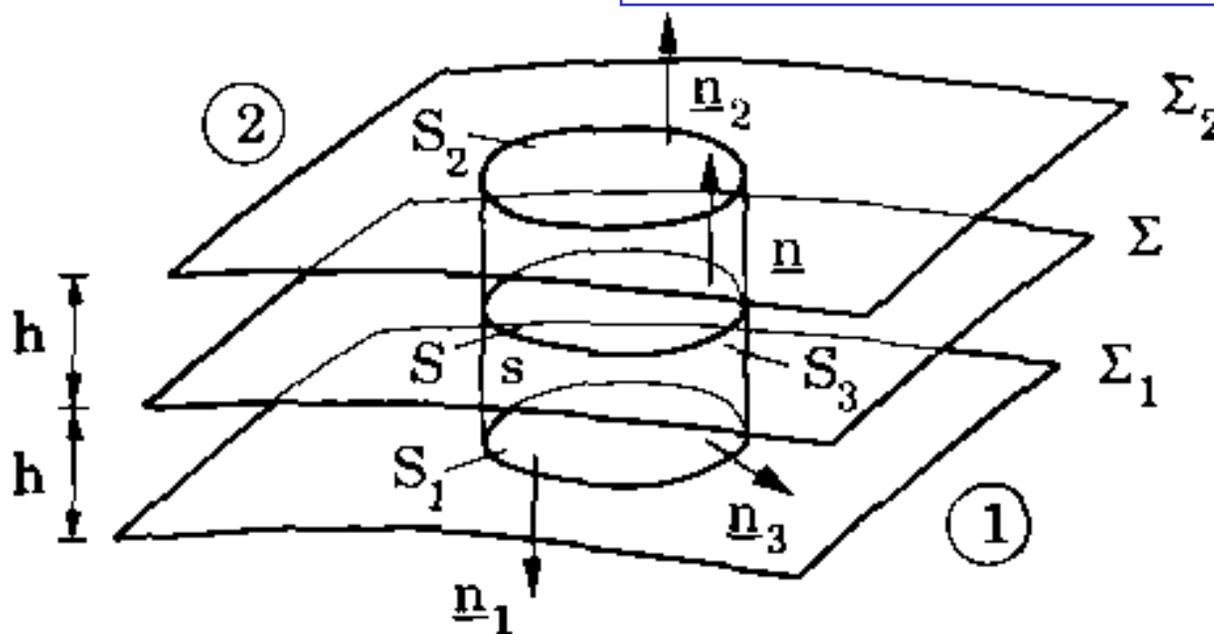
$$\nabla \times E = - J_{mi} - \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} + J + J_i$$

+ relazioni costitutive



Sistema di equ. diff. alle derivate parziali che permette di conoscere il campo EM in ogni punto di una regione di spazio una volta assegnate le grandezze impresse
E' necessario però conoscere le condizioni iniziali (vincoli per il campo in particolari istanti) e quelle al contorno (vincoli per il campo su particolari superfici)



Condizioni relative alle componenti normali

$$\oint_{S_t} \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{D} dS = \int_{\tau} \rho d\tau$$

$$\longrightarrow \int_{S_1} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{D}_1 dS + \int_{S_2} \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{D}_2 dS + \int_{S_3} \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{D}_3 dS = \int_{\tau} \rho d\tau$$

$$S_t = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

al limite per $h \rightarrow 0$

$$S_2 \rightarrow S \quad S_1 \rightarrow S \quad \mathbf{n}_2 \rightarrow \mathbf{n} \quad \mathbf{n}_1 \rightarrow -\mathbf{n}$$

$$\mathbf{D}_2 \rightarrow \mathbf{D}^+; \quad \mathbf{D}_1 \rightarrow \mathbf{D}^- \quad \text{mis}(S_3) \rightarrow 0 \quad \text{mis}(\tau) \rightarrow 0$$

Ipotesi: \mathbf{D} limitato nella regione di transizione

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{S_3} \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{D}_3 dS = 0$$

La stessa ipotesi non può valere per ρ (alla superficie di mezzi perfettamente conduttori ρ può assumere valori infinitamente elevati in spessori infinitesimi)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\tau} \rho d\tau = \lim_{h \rightarrow 0} \int_S \int_{-h}^h \rho dh dS = \int_S \left(\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h}^h \rho dh \right) dS = \int_S \rho_S dS$$

$$\rho_S = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h}^h \rho dh$$

densità superficiale di carica



$$\int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}^+ - \mathbf{D}^-) dS = \int_S \rho_s dS$$

data la scelta arbitraria di S

1) Condizione al contorno

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}^+ - \mathbf{D}^-) = \rho_s$$

Alla superficie di separazione tra due mezzi, la componente normale del vettore induzione elettrica subisce una discontinuità pari alla densità superficiale di carica

per dualità

2) Condizione al contorno

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^-) = 0$$

Alla superficie di separazione tra due mezzi, la componente normale del vettore induzione magnetica è continua (non esistono cariche magnetiche)

Condizioni relative alle componenti tangenziali

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad \longrightarrow \quad \int_{\tau} \nabla \times \mathbf{H} \, d\tau = \oint_{S_t} \mathbf{n}_t \times \mathbf{H} \, dS = \int_{\tau} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \, d\tau + \int_{\tau} \mathbf{J} \, d\tau$$

$$\oint_{S_t} \mathbf{n}_t \times \mathbf{H} \, dS = \int_{S_1} \mathbf{n}_1 \times \mathbf{H}_1 \, dS + \int_{S_2} \mathbf{n}_2 \times \mathbf{H}_2 \, dS + \int_{S_3} \mathbf{n}_3 \times \mathbf{H}_3 \, dS = \int_{\tau} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \, d\tau + \int_{\tau} \mathbf{J} \, d\tau$$

al limite per $h \rightarrow 0$

$$S_2 \rightarrow S; \quad S_1 \rightarrow S \quad \mathbf{n}_2 \rightarrow \mathbf{n} \quad \mathbf{n}_1 \rightarrow -\mathbf{n}$$

$$\mathbf{H}_2 \rightarrow \mathbf{H}^+; \quad \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}^- \quad \text{mis}(S_3) \rightarrow 0 \quad \text{mis}(\tau) \rightarrow 0$$

Ipotesi: \mathbf{H} e $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ limitati nella regione di transizione

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{S_3} \mathbf{n}_3 \times \mathbf{H}_3(t) \, dS = 0 \qquad \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\tau} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \, d\tau = 0$$

La stessa ipotesi non può valere per \mathbf{J} (alla superficie di mezzi perfettamente conduttori \mathbf{J} può assumere valori infinitamente elevati in spessori infinitesimi)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\tau} \mathbf{J} \, d\tau = \lim_{h \rightarrow 0} \int_S \int_{-h}^h \mathbf{J} \, dh \, dS = \int_S \left(\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h}^h \mathbf{J} \, dh \right) dS = \int_S \mathbf{J}_S \, dS$$

$$\mathbf{J}_S = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h}^h \mathbf{J} \, dh$$

densità di corrente superficiale



$$\int_S \mathbf{n} \times (\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-) dS = \int_S J_s dS \quad \text{data la scelta arbitraria di } S$$

3) Condizione al contorno

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-) = J_s \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{n} \times (\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-)] \times \mathbf{n} = J_s \times \mathbf{n}$$

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{H}^\pm) \times \mathbf{n} = \mathbf{H}^\pm (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^\pm) = \mathbf{H}_t^\pm$$

$$\mathbf{H}_t^+ - \mathbf{H}_t^- = J_s \times \mathbf{n}$$

per dualità

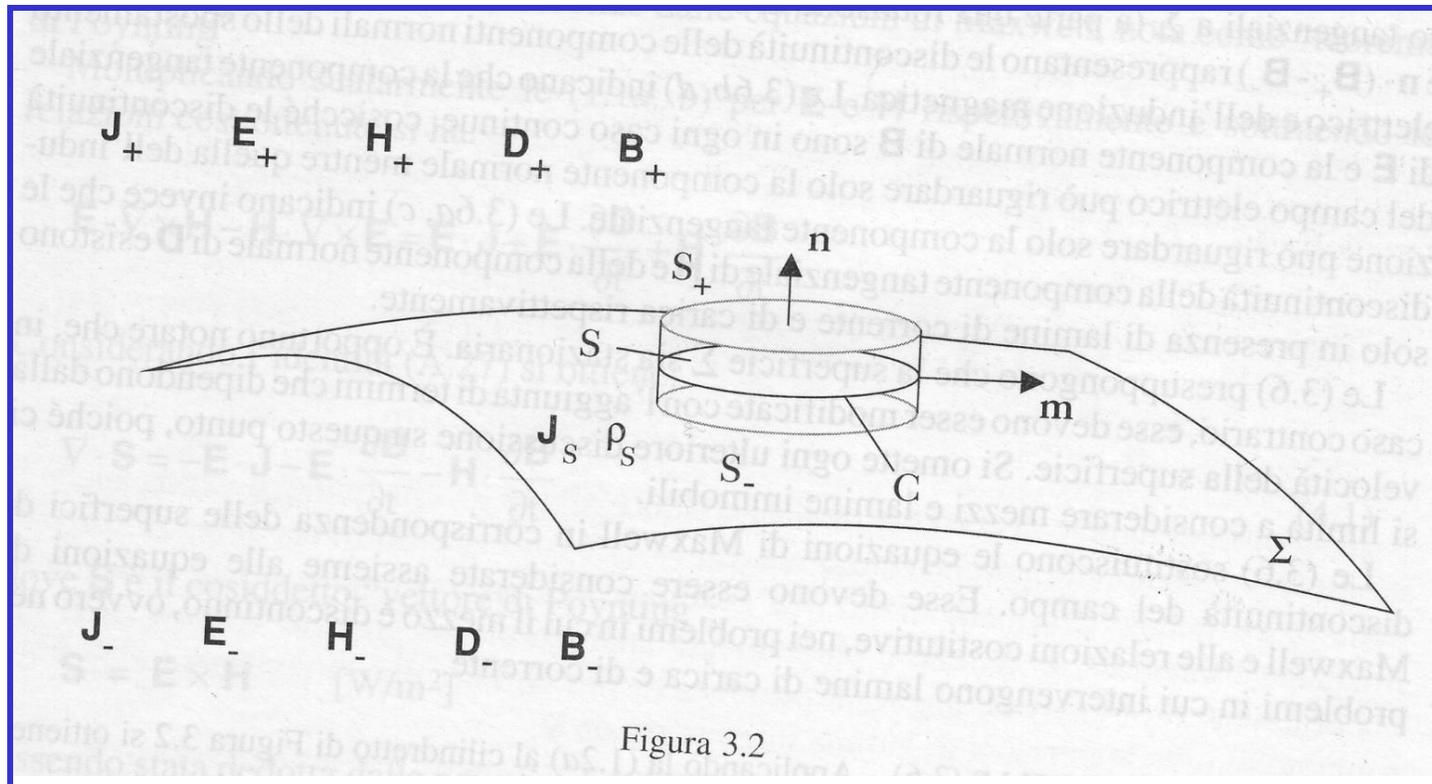
Alla superficie di separazione tra due mezzi, il campo magnetico tangenziale subisce una discontinuità pari alla densità superficiale di corrente ruotata di $\pi/2$ sul piano tangente

4) Condizione al contorno

$$\mathbf{E}_t^+ - \mathbf{E}_t^- = 0$$

Alla superficie di separazione tra due mezzi, il campo elettrico tangenziale è continuo (non esistono cariche magnetiche)

Superficie di discontinuità



$$\boxed{\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{J} d\tau = -\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau} \quad \longrightarrow \quad \int_{S_1} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{J}_1 dS + \int_{S_2} \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{J}_2 dS + \int_{S_3} \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{J}_3 dS = -\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

al limite per $h \rightarrow 0$

$$S_2 \rightarrow S; \quad S_1 \rightarrow S \quad \mathbf{n}_2 \rightarrow \mathbf{n} \quad \mathbf{n}_1 \rightarrow -\mathbf{n}$$

$$\mathbf{J}_2 \rightarrow \mathbf{J}^+; \quad \mathbf{J}_1 \rightarrow \mathbf{J}^- \quad \text{mis}(S_3) \rightarrow 0 \quad \text{mis}(\tau) \rightarrow 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = \lim_{h \rightarrow 0} \int_S \int_{-h}^h \frac{\partial \rho}{\partial t} dh dS = \int_S \left(\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h}^h \frac{\partial \rho}{\partial t} dh \right) dS = \int_S \frac{\partial \rho_s}{\partial t} dS$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{S_3} \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{J}_3 dS = \lim_{h \rightarrow 0} \oint_S \int_{-h}^h \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{J}_3 dh dS = \oint_S \mathbf{n}_3 \left(\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h}^h \mathbf{J}_3 dh \right) dS = \oint_S \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{J}_s dS$$

$$\oint_S \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{J}_s dS = \int_S \nabla_s \cdot \mathbf{J}_s dS \quad \nabla_s = \nabla - \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n}$$

$$\int_{S_1} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}^+ - \mathbf{J}^-) dS + \int_S \nabla_s \cdot \mathbf{J}_s dS = -\int_S \frac{\partial \rho_s}{\partial t} dS$$

$$\boxed{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}^+ - \mathbf{J}^-) = -\nabla_s \cdot \mathbf{J}_s - \frac{\partial \rho_s}{\partial t}}$$

Superficie di discontinuità: concetto di lamina

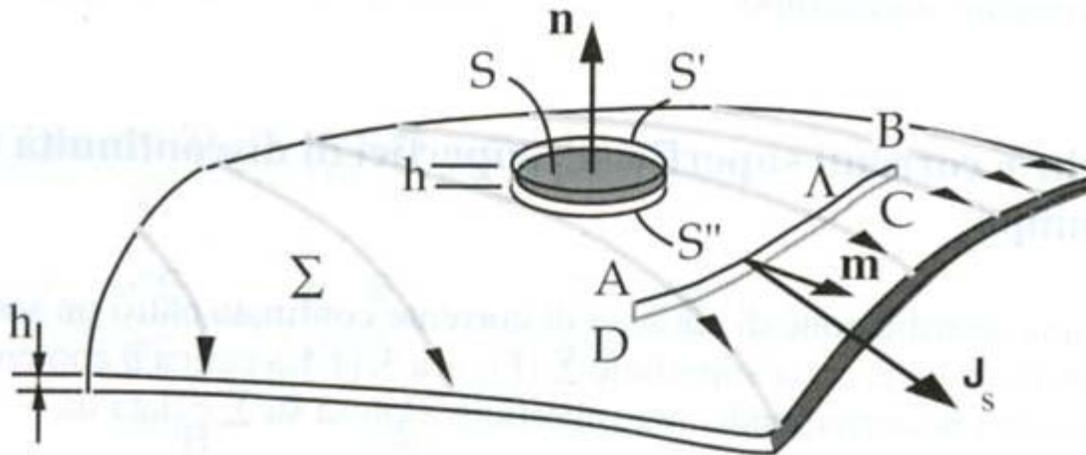
$$q = \int_{\tau} \rho d\tau = \lim_{h \rightarrow 0} \int_S \int_{-h}^h \rho dh dS = \int_S \left(\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h}^h \rho dh \right) dS = \int_S \rho_S dS \quad \rho_S = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h}^h \rho dh$$

Densità sup. di carica
(C/m²)

$$i = \int_{\tau} J d\tau = \lim_{h \rightarrow 0} \int_S \int_{-h}^h J dh dS = \int_S \left(\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h}^h J dh \right) dS = \int_S J_S dS \quad J_S = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h}^h J dh$$

Densità sup. di corrente
(A/m)

$$i = \int_{ABCD} J dS = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Lambda} \int_{-h}^h J dh dS = \int_{\Lambda} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h}^h J dh \right) dS = \int_{\Lambda} J_S dS$$



ρ e J dovrebbero essere nulle fuori della lamina e infinitamente intense sulla lamina. Questo andamento è rappresentabile come una δ -Dirac \rightarrow in forma approx. si introducono le ρ_S e J_S

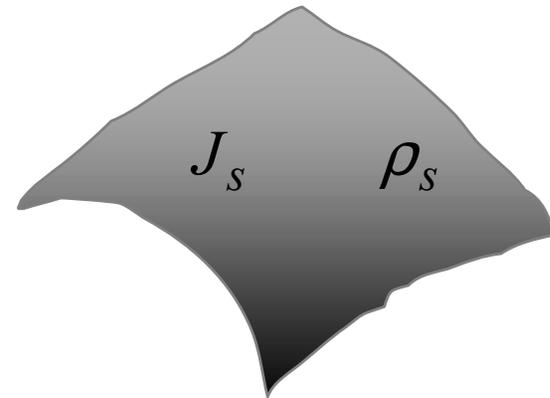
Casi particolari di mezzo materiale

Separazione tra due
dielettrici perfetti $\sigma \rightarrow 0$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = 0 \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$$

$J^+ \quad E^+ \quad H^+ \quad D^+ \quad B^+$



$J^- \quad E^- \quad H^- \quad D^- \quad B^-$

Conduttore perfetto $\sigma \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\mathbf{B} = 0 \quad \text{per le rel. costitutive} \quad \mathbf{D} = 0 \quad \mathbf{H} = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \rho_s \quad \mathbf{n} \times \mathbf{H} = J_s$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$$

Condizioni al contorno

dominio della frequenza

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$$

alle grandezze scalari e vettoriali funzioni del tempo



trasformate di Fourier (ovvero le grandezze complesse Rappresentative)

Classificazione dei problemi elettromagnetici

Esistono casi in cui:

- a) La densità di corrente di spostamento $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ è trascurabile rispetto alla corrente di conduzione \mathbf{J}
- b) $|\nabla \times \mathbf{E}| = \left| \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right|$ è trascurabile rispetto a $|\nabla \cdot \mathbf{E}|$ cioè il campo elettrico deriva essenzialmente da sorgenti e non da vortici



$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \text{se } J \text{ e } \rho \text{ sono indep. dal tempo}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$



Probl. elettrostatico

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

Probl. magnetostatico

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Probl. elettrostatico

Mezzo L-S-I-O-nonD $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{E} = -\nabla V \quad \longrightarrow \quad \nabla \cdot (-\epsilon \nabla V) = \rho$$

mezzi omogenei

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

eq. di Poisson

Probl. magnetostatico

Mezzo L-S-I-O-nonD $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \longrightarrow \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}$$

$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$

mezzi omogenei

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$

eq. vettoriale di Poisson

r' vettore posizione del generico punto P' (sorgente)
 r vettore posizione del punto P in cui si vuole V

$$\nabla^2 \mathbf{V} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

eq. di Poisson



$$V(\mathbf{r}) = \int_{\tau} \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\epsilon} d\tau'$$

$$\nabla^2 \mathbf{V} = 0$$

eq. di laplace

*Risposta impulsiva
spaziale: funzione di Green*

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$

eq. vettoriale
di Poisson



$$A_x(\mathbf{r}) = \int_{\tau} \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} J_x(\mathbf{r}') d\tau'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_{\tau} \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau'$$

3 equazioni scalari

*Risposta impulsiva
spaziale: funzione di Green*