Argomento 4

lezione 6

Francesca Apollonio

Dipartimento Ingegneria Elettronica

E-mail: apollonio@die.uniroma1.it

Conservazione dell'energia: **teorema di Poynting**

<u>dominio del tempo</u>

A causa del lavoro compiuto dalle forze EM le cariche in moto possono acquistare o perdere energia. Si assume che questa energia acquisita o persa sia scambiata con il campo EM, attribuendo ad esso la <u>capacità di immagazzinare energia</u>. Questo Concetto è fondato su una relazione che discende dalle equazioni di Maxwell $\Rightarrow$ *Teorema di POYNTING*

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{J}_{mi} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \textit{moltiplico per } \boldsymbol{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} + \mathbf{J}_i \qquad \textit{moltiplico per } \boldsymbol{E}$$

$$\mathbf{H}\cdot\nabla\times\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\nabla\times\mathbf{H} = -\mathbf{J}_{mi}\cdot\mathbf{H} - \mathbf{J}_i\cdot\mathbf{E} - \mathbf{J}\cdot\mathbf{E} - \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\int_\tau \left(\mathbf{H}\cdot\nabla\times\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\nabla\times\mathbf{H}\right) d\tau = -\int_\tau \left(\mathbf{J}_{mi}\cdot\mathbf{H} + \mathbf{J}_i\cdot\mathbf{E}\right) d\tau - \int_\tau \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\, d\tau - \int_\tau \left(\mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) d\tau$$

$$\downarrow$$

$$\int_\tau \nabla\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right) d\tau \longrightarrow$$

teorema della divergenza

$$\int_\tau \nabla\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right) d\tau = \oint_S \mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right) dS$$

apollonio@die.uniroma1.it

Teorema di Poynting

$$\boxed{\oint_S \mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,dS + \int_\tau \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\,d\tau + \int_\tau \left(\mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{t}} + \mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{t}}\right) d\tau = -\int_\tau \left(\mathbf{J}_{mi}\cdot\mathbf{H} + \mathbf{J}_{i}\cdot\mathbf{E}\right) d\tau}$$

Ponendo:

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} \leftarrow$$

Vettore di Poynting o di radiazione (densità sup. di potenza: W/m^2)

$$p_{\mathbf{c}} = \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}$$

$$p_{\mathbf{H}} = \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$p_{\mathbf{E}} = \mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$p_{\mathbf{i}} = -\mathbf{J}_{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{E}$$

$$p_{\mathbf{mi}} = -\mathbf{J}_{\mathbf{mi}}\cdot\mathbf{H}$$

$$\oint_S \underbrace{\mathbf{n}\cdot\Pi\,dS}_{4} + \int_\tau \underbrace{p_{\mathrm{c}}\,d\tau}_{1} + \int_\tau \underbrace{(p_{\mathrm{H}} + p_{\mathrm{E}})}_{3}\,d\tau = \int_\tau \underbrace{(p_{\mathrm{i}} + p_{\mathrm{mi}})}_{2}\,d\tau$$

Principio di conservazione dell'energia.
Ciascun termine dell'equazione ha le dimensioni di una potenza (W)

(densità volumetrica di potenza: W/m^3)

apollonio@die.uniroma1.it

Teorema di Poynting: interpretazione fisica

1

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Forza di Lorentz

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = q(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$$

potenza fornita dal campo EM alla carica

$$\mathbf{f} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Forza per unità di volume

$$p = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} = \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$$

densità di potenza fornita dal campo EM alla densità di carica

$$\boxed{p_{\mathrm{c}} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}}$$

densità di potenza ***fornita dal campo EM*** *alla densità di corrente -> densità di potenza dissipata per effetto Joule*

apollonio@die.uniroma1.it

Teorema di Poynting: interpretazione fisica

$$\boxed{p_{\mathrm{c}} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}}$$

Forma assunta dalla p_c in vari tipi di mezzi materiali

L-S-I-nonD

$$p_{\mathrm{c}} = \sigma\, \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \sigma \sum_{i=1}^{3} E_i^2$$ *forma quadratica;* $$p_{\mathrm{c}} = 0$$ *mezzo non dissipativo*

L-S-NI-nonD

$$p_{\mathrm{c}} = \left(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{E} \right) \cdot \mathbf{E} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\, E_i E_j$$ *forma quadratica;*

apollonio@die.uniroma1.it

Teorema di Poynting: interpretazione fisica

2

$$\boxed{p_{\mathrm{i}} = -\mathbf{J}_{\mathrm{i}} \cdot \mathbf{E}}$$

densità di potenza ***fornita al campo EM*** *dalla densità di corrente elettrica impressa*

$$\boxed{p_{\mathbf{mi}} = -\mathbf{J}_{\mathbf{mi}} \cdot \mathbf{H}}$$

densità di potenza ***fornita al campo EM*** *dalla densità di corrente magnetica impressa*

3

$$\boxed{p_{\mathrm{H}} = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}$$

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{r})\mathbf{H}$$

$$p_{\mathrm{H}} = \mu(\mathbf{r})\mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\mu(\mathbf{r})\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}\right] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}\left[\frac{1}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\right]$$

apollonio@die.uniroma1.it

Teorema di Poynting: interpretazione fisica

$$w_{\mathbf{H}} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H} = \frac{1}{2}\mu(\mathbf{r})\mathbf{H}\cdot\mathbf{H} \quad \Rightarrow \quad p_{\mathbf{H}} = \frac{\partial}{\partial t} w_{\mathbf{H}}$$

densità di energia magnetica immagazzinata — *densità di potenza magnetica*

$$\boxed{p_{\mathbf{E}} = \mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}} \qquad \mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}$$

$$p_{\mathbf{E}} = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}\left[\frac{1}{2}\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\right] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}\left[\frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\right]$$

$$w_{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{2}\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad p_{\mathbf{E}} = \frac{\partial}{\partial t} w_{\mathbf{E}}$$

densità di energia elettrica immagazzinata — *densità di potenza elettrica*

apollonio@die.uniroma1.it

Teorema di Poynting: interpretazione fisica

4

$$\oint_S \mathbf{n}\cdot\Pi\, dS + \int_\tau p_{\mathrm{c}}\, d\tau + \int_\tau \left(p_{\mathrm{H}} + p_{\mathrm{E}}\right) d\tau = \int_\tau \left(p_{\mathrm{i}} + p_{\mathrm{mi}}\right) d\tau$$

potenza dissipata

potenza immagazzinata

potenza fornita dalle correnti impresse al campo EM

Flusso del vettore di Poynting: potenza EM che esce dalla zona racchiusa dalla superficie

Bilancio energetico del campo EM in un volume τ racchiuso dalla superficie S

Conservazione dell'energia: **teorema di Poynting**

<u>dominio frequenza</u>

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \ \mathbf{J}_{mi} - j\omega \mathbf{B}$$ *moltiplico per **H****

$$\left(\nabla \times \mathbf{H} = \ \mathbf{J} + \mathbf{J}_i + j\omega \mathbf{D}\right)^*$$ *moltiplico per **E***

$$\mathbf{H}^* \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \ \cdot \nabla \times \mathbf{H}^* = -\mathbf{J}_{\mathbf{mi}} \cdot \mathbf{H}^* - \mathbf{J}_{\mathbf{i}}^* \cdot \mathbf{E} - \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} - \mathbf{j}\omega \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* + \mathbf{j}\omega \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*$$

$$\frac{1}{2}\oint_{\mathbf{S}} \mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\right) dS + \frac{1}{2}\int_\tau \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} \ d\tau + j\omega \frac{1}{2}\int_\tau \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*\right) d\tau = -\frac{1}{2}\int_\tau \left(\mathbf{J}_{\mathbf{mi}} \cdot \mathbf{H}^* + \mathbf{J}_{\mathbf{i}}^* \cdot \mathbf{E}\right) d\tau$$

<u>Ponendo:</u>

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{2}\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \qquad p_{\mathbf{H}} = \frac{1}{2}\mathrm{j}\omega \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{B}$$

$$p_{\mathbf{c}} = \frac{1}{2}\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} \qquad p_{\mathbf{E}} = -\frac{1}{2}\mathrm{j}\omega \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*$$

$$p_{\mathbf{i}} = -\frac{1}{2}\mathbf{J}_{\mathbf{i}}^* \cdot \mathbf{E} \qquad p_{\mathbf{mi}} = -\frac{1}{2}\mathbf{J}_{\mathbf{mi}} \ \cdot \mathbf{H}^*$$

$$\boxed{\underbrace{\oint_S \mathbf{n} \cdot \Pi \, dS}_{4} + \underbrace{\int_\tau p_{\mathrm{c}} \, d\tau}_{1} + \underbrace{\int_\tau \left(p_{\mathrm{H}} + p_{\mathrm{E}}\right) d\tau}_{3} = \underbrace{\int_\tau \left(p_{\mathrm{i}} + p_{\mathrm{mi}}\right) d\tau}_{2}}$$

apollonio@die.uniroma1.it

Regime sinusoidale – dominio della frequenza

Rappresentazione di grandezze sinusoidali attraverso quantità complesse

$$\mathbf{E} = \mathbf{x_0}\, E_{0x}\cos(\omega t + \varphi_x) + \mathbf{y_0}\, E_{0y}\cos(\omega t + \varphi_y) + \mathbf{z_0}\, E_{0z}\cos(\omega t + \varphi_z) =$$

$$\mathrm{Re}\left[(\mathbf{x_0}\, E_{0x} e^{j\varphi_x} + \mathbf{y_0}\, E_{0y} e^{j\varphi_y} + \mathbf{z_0}\, E_{0z} e^{j\varphi_z}) e^{j\omega t} \right] = \mathrm{Re}\left[\mathbf{E}\, e^{j\omega t} \right]$$

$$\mathbf{E_x} = \mathbf{E_{0x}}\, e^{j\varphi_x} \qquad \mathbf{E_y} = \mathbf{E_{0y}}\, e^{j\varphi_\mathbf{y}} \qquad \mathbf{E_z} = \mathbf{E_{0z}}\, e^{j\varphi_z}$$

Vettore a componenti complesse: <u>fasori</u>

Rappresentazione complessa di quantità non lineari (potenza)

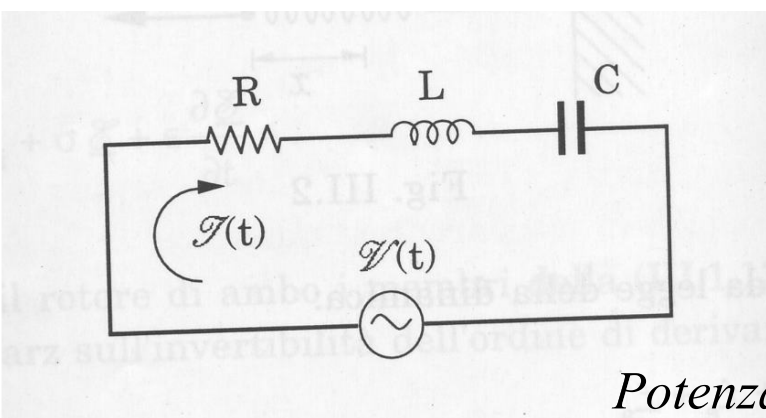

Fig. III.1

$$P(t) = V(t) I(t) = \mathrm{Re}\left[V e^{i\omega t} \right] \frac{1}{2}\left(I e^{i\omega t} + I^* e^{-i\omega t} \right) =$$

$$\mathrm{Re}\left[V e^{i\omega t}\, \frac{1}{2}\left(I e^{i\omega t} + I^* e^{-i\omega t} \right) \right] = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2} V I e^{2i\omega t} + \frac{1}{2} V I^* \right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2} V I e^{2i\omega t} \right] + \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2} V I^* \right]$$

Potenza complessa

$$P = \frac{1}{2} V I^* = P_R + j P_J$$

p. reale *p. reattiva*

$$\frac{1}{T}\int_0^T P(t)\, dt$$

Teorema di Poynting: interpretazione fisica

Valida solo in regime <u>armonico</u> (variazioni sinusoidali)

$$\oint_S \mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,dS+\int_\tau \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\,d\tau+\int_\tau\left(\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\mathbf{t}}+\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial\mathbf{t}}\right)d\tau=-\int_\tau\left(\mathbf{J}_{mi}\cdot\mathbf{H}+\mathbf{J}_i\cdot\mathbf{E}\right)d\tau$$

$$\oint_S \mathbf{n}\cdot\Pi\,dS+\int_\tau p_{\mathbf{c}}\,d\tau+\int_\tau\left(p_{\mathbf{H}}+p_{\mathbf{E}}\right)d\tau=\int_\tau\left(p_{\mathbf{i}}+p_{\mathbf{mi}}\right)d\tau$$

Valor medio nel periodo T=1/f $\Rightarrow$ $\overline{\alpha(t)}=\frac{1}{T}\int_0^T\alpha(t)\,dt$

$$\oint_S \mathbf{n}\cdot\overline{(\mathbf{E}\times\mathbf{H})}\,dS+\int_\tau \overline{\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}}\,d\tau+\int_\tau\left(\overline{\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\mathbf{t}}}+\overline{\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial\mathbf{t}}}\right)d\tau=-\int_\tau\left(\overline{\mathbf{J}_{mi}\cdot\mathbf{H}}+\overline{\mathbf{J}_i\cdot\mathbf{E}}\right)d\tau$$

$$\Pi=\mathbf{E}\times\mathbf{H}=\mathbf{Re}\left[\mathbf{E}e^{j\omega t}\right]\times\frac{1}{2}\left(\mathbf{H}\,e^{j\omega t}+\mathbf{H}^*\,e^{-j\omega t}\right)=\mathbf{Re}\left[\frac{1}{2}\underbrace{\mathbf{E}\times\mathbf{H}\,e^{2j\omega t}}_{\text{sinusoidale}}\right]+\mathbf{Re}\left[\frac{1}{2}\underbrace{\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*}_{\text{costante}}\right]$$

apollonio@die.uniroma1.it

Teorema di Poynting: interpretazione fisica

Analisi dei singoli termini

$$\overline{\mathbf{\Pi}} = \overline{\mathbf{E}\times\mathbf{H}} = \mathbf{Re}\left[\frac{1}{2}\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right] = \mathbf{Re}[\mathbf{\Pi}]$$

$$p_i = -\mathbf{J}_i \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{J}_i e^{j\omega t} + \mathbf{J}_i^{\,*} e^{-j\omega t}\right)\cdot \mathbf{Re}\left[\mathbf{E}e^{j\omega t}\right] = \mathbf{Re}\left[-\frac{1}{2}\mathbf{J}_i \cdot \mathbf{E}e^{2j\omega t}\right] + \mathbf{Re}\left[-\frac{1}{2}\mathbf{J}_i \cdot \mathbf{E}\right]$$

$$\overline{p_i} = \mathbf{Re}\left[-\frac{1}{2}\mathbf{J}_i^{\,*} \cdot \mathbf{E}\right] = \mathbf{Re}[p]$$

$$\overline{p_{mi}} = \mathbf{Re}\left[-\frac{1}{2}\mathbf{J}_{mi} \cdot \mathbf{H}^*\right] = \mathbf{Re}[p_{mi}]$$

$$\overline{p_c} = \mathbf{Re}\left[\frac{1}{2}\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}\right] = \mathbf{Re}[p_c]$$

La parte reale dei singoli termini del teorema di Poynting in frequenza coincide con il valor medio nel periodo del corrispondente termine nell'espressione nel tempo.

Teorema di Poynting: interpretazione fisica

$$p_E = \mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{Re}\left[\mathbf{E}\, e^{j\omega \mathbf{t}}\right]\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}\frac{1}{2}\left(\mathbf{D}e^{j\omega \mathbf{t}} + \mathbf{D}^* e^{-j\omega \mathbf{t}}\right) = \mathbf{Re}\left[\mathbf{E}\, e^{j\omega \mathbf{t}}\right]\cdot\frac{1}{2}\, j\omega\left(\mathbf{D}e^{j\omega \mathbf{t}} - \mathbf{D}^* e^{-j\omega \mathbf{t}}\right) =$$

$$= \mathbf{Re}\left[\frac{1}{2}\, j\omega\, \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\, e^{2j\omega \mathbf{t}}\right] + \mathbf{Re}\left[-\frac{1}{2}\, j\omega\, \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}^*\right]$$

$$\overline{p_E} = \mathbf{Re}\left[-\frac{1}{2}\omega\, \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}^*\right] = \mathbf{Re}\left[p_E\right]$$

$$\overline{p_H} = \mathbf{Re}\left[\frac{1}{2}\omega\, \mathbf{H}^*\cdot\mathbf{B}\right] = \mathbf{Re}\left[p_H\right]$$

La parte reale dei singoli termini del teorema di Poynting in frequenza coincide con il valor medio nel periodo del corrispondente termine nell'espressione nel tempo.

1

$$\boxed{p_{\mathbf{c}} = \frac{1}{2}\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}}$$

Forma assunta dalla p_c in vari tipi di mezzi materiali

<u>L-S-I-nonD</u>

$$p_{\mathbf{c}} = \frac{1}{2}\sigma\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*$$

quantità reale >=0
se il mezzo è passivo

3

$$\boxed{p_{\mathbf{E}} = -\frac{1}{2}\mathbf{j}\omega\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}^*}$$

<u>L-S-I-nonD</u>

$$w_{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{Re}\left[\frac{1}{4}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\,e^{2j\omega\mathbf{t}}\right] + \mathbf{Re}\left[\underbrace{\frac{1}{4}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}^*}_{\mathbf{w}_{\mathbf{E}}}\right]$$

$$\overline{w_{\mathbf{E}}} = \mathbf{Re}\left[\frac{1}{4}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}^*\right] = \mathbf{Re}\left[\frac{1}{4}\varepsilon\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*\right] = \frac{1}{4}\varepsilon\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^* = \frac{1}{4}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}^* = \mathbf{w}_E$$

$$p_{\mathbf{E}} = -2j\omega\frac{1}{4}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}^* = -2j\omega\,\mathbf{w}_{\mathbf{E}}$$

quantità immaginaria pura

$$\overline{p_{\mathbf{E}}} = \mathrm{Re}\left[p_{\mathbf{E}}\right] = 0$$

L-S-I-D

$$p_{\mathbf{E}} = -\frac{1}{2}\mathbf{j}\omega\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}^{*} = -\frac{1}{2}\mathbf{j}\omega\,\mathbf{E}\left(\varepsilon_R - j\varepsilon_J\right)\mathbf{E}^{*} = -j\frac{1}{2}\omega\,\varepsilon_R\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^{*} - \frac{1}{2}\omega\,\varepsilon_J\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^{*}$$

$$\overline{p_{\mathbf{E}}} = \mathrm{Re}\left[p_{\mathbf{E}}\right] = -\frac{1}{2}\omega\,\varepsilon_J\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^{*}$$

Perdite dielettriche

$$\boxed{p_{\mathbf{E}} = -\frac{1}{2}\mathbf{j}\omega\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}^{*}}$$

L-S-I-nonD

$$\overline{p_{\mathbf{H}}} = \mathrm{Re}\left[p_{\mathbf{H}}\right] = 0$$

L-S-I-D

$$\overline{p_{\mathbf{H}}} = \mathrm{Re}\left[p_{\mathbf{H}}\right] = -\frac{1}{2}\omega\,\mu_J\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^{*}$$

Teorema di Poynting: interpretazione fisica

Se non ci sono correnti impresse:

$$\frac{1}{2}\oint_{S}\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^{*}\right)dS = .-\frac{1}{2}\int_{\tau}\mathbf{J}^{*}\cdot\mathbf{E}\;d\tau - j\omega\frac{1}{2}\int_{\tau}\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}^{*}-\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}^{*}\right)d\tau$$

L-S-O-I-ND

$$\frac{1}{2}\oint_{S}\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^{*}\right)dS = -\frac{1}{2}\int_{\tau}\sigma\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^{*}d\tau - j\omega\frac{1}{2}\int_{\tau}\left(\mu\,\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^{*}-\varepsilon\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^{*}\right)d\tau$$

$$\mathrm{Re}\left[\oint_{S}\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^{*}\right)dS\right] = -\int_{\tau}\sigma\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^{*}d\tau$$

Potenza dissipata: perdite per conduzione

$$\mathrm{Im}\left[\oint_{S}\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^{*}\right)dS\right] = -\omega\int_{\tau}\left(\mu\,\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^{*}-\varepsilon\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^{*}\right)d\tau$$

Potenza reattiva

apollonio@die.uniroma1.it

Teorema di Poynting: interpretazione fisica

*L-S-O-I-**D***

$$\frac{1}{2}\oint_{\mathbf{S}} \mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right)\,dS = -\frac{1}{2}\int_{\tau}\sigma\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^* d\tau - j\omega\frac{1}{2}\int_{\tau}\left(\mu\,\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^* - \underset{\downarrow \atop \left(\varepsilon_R - j\varepsilon_J\right)}{\varepsilon}\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*\right)d\tau$$

Esempio: dielettrico dispersivo

$$\mathrm{Re}\left[\oint_{\mathbf{S}} \mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right)\,dS\right] = -\int_{\tau}\sigma\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^* d\tau + \int_{\tau}\omega\,\varepsilon_J\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^* d\tau$$

Potenza dissipata: perdite per conduzione e perdite dovute al dielettrico

$$\mathrm{Im}\left[\oint_{\mathbf{S}} \mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right)\,dS\right] = -\omega\int_{\tau}\left(\mu\,\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^* - \varepsilon_R\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*\right)d\tau$$

Potenza reattiva

apollonio@die.uniroma1.it