Argomento 8

- Lezione 14
- Lezione 15

Francesca Apollonio

Dipartimento Ingegneria Elettronica

E-mail: apollonio@die.uniroma1.it

Linee di trasmissione

Formalismo utilizzato per lo studio dei fenomeni di propagazione: ***teoria delle linee di trasmissione***

La teoria delle linee di trasmissione fa da ponte tra la teoria dei campi EM e la teoria di base dei circuiti elettronici. Inoltre è di fondamentale importanza per l'analisi dei circuiti a microonde.

E' stato visto come le variazioni del campo magnetico generino un campo elettrico (legge di Faraday) e come viceversa variazioni del campo elettrico inducano un campo magnetico (legge di Ampere)-> propagazione di onde EM nello spazio.

La propagazione del campo attraverso onde EM è di fondamentale importanza nel convogliare ***energia*** *EM da una sorgente ad un carico o ad un sistema che dovrà utilizzarla. Questa propagazione avviene anche lungo superfici di contorno dielettriche o conduttrici dando luogo ad onde che sono* ***guidate da tali superfici****.*

Uno dei sistemi più semplici per il trasporto di energia è una ***linea di trasmissione a due conduttori***

La differenza chiave tra la teoria dei circuiti e la teoria delle linee di trasmissione è la ***dimensione elettrica*** *in gioco.*

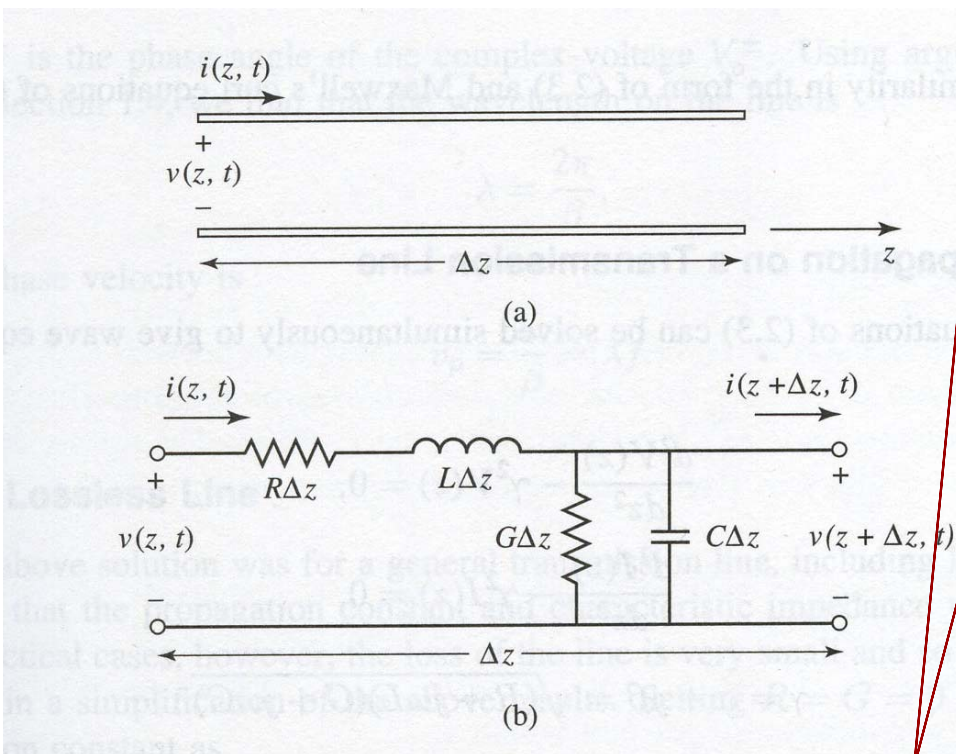
<u>Teoria dei circuiti</u>

dimensioni fisiche $\ll \lambda$

<u>Linee di trasmissione</u>

dimensioni fisiche $\cong \lambda$

$\gg \lambda$



Circuiti a parametri distribuiti

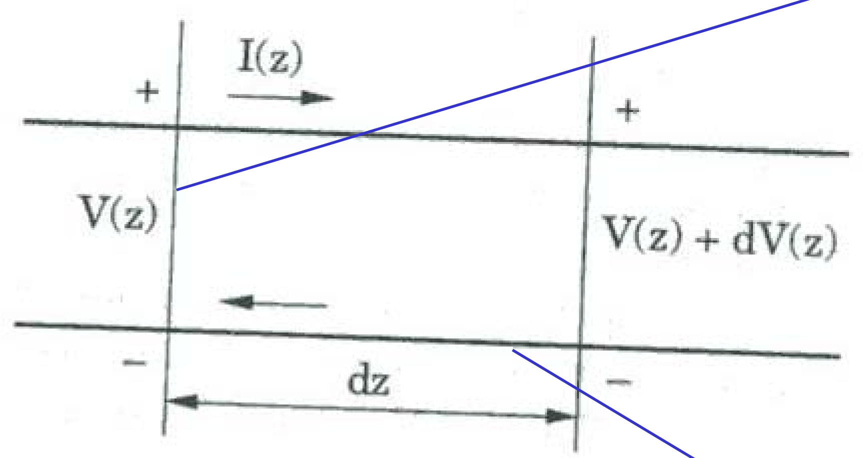
R=resistenza serie per unità di lunghezza	Ω / m
L=induttanza serie per unità di lunghezza	H / m
G=conduttanza parallelo per unità di lunghezza	S / m
C=capacità parallelo per unità di lunghezza	F / m

Perdite associate alla linea

apollonio@die.uniroma1.it

Linea bifilare

Storicamente le eq. dei telegrafisti sono state introdotte studiando andamento di tensione e corrente in una linea bifilare; in questo caso se la freq. è suff. bassa



L'integrale di linea del campo elettrico tra i due conduttori è indipendente dal percorso ed è pari alla tensione in quella sezione.

La circuitazione del campo magnetico lungo una linea chiusa che circonda uno dei conduttori è pari alla corrente che percorre il conduttore stesso

Date due sezioni della linea distanti dz: siano **R, L, G, C** *rispettivamente la* ***resistenza*** *dei conduttori, l'****induttanza*** *del circuito formato dai due conduttori, la* ***conduttanza*** *dovuta alla conducibilità del dielettrico interposto tra i conduttori e la* ***capacità*** *tra i conduttori per unità di lunghezza.*

costanti primarie della linea

$$V(z+dz)=V(z)+dV(z)$$

$$V(z)+dV(z)=V(z)-(R+j\omega L)dzI(z)\Rightarrow\frac{dV(z)}{dz}=-(R+j\omega L)I(z)=-\tilde{Z}_sI(z)$$

$$I(z+dz)=I(z)+dI(z)$$

$$I(z)+dI(z)=I(z)-(G+j\omega C)dzV(z)\Rightarrow\frac{dI(z)}{dz}=-(G+j\omega C)V(z)=-\tilde{Y}_pV(z)$$

$$\frac{dV(z)}{dz}=-\tilde{Z}_sI(z)$$

$$\frac{dI(z)}{dz}=-\tilde{Y}_pV(z)$$

La propagazione di un'onda piana e uniforme nello spazio libero è descritta dalle stesse eq. che descrivono l'andamento di tensione e corrente in una linea bifilare

apollonio@die.uniroma1.it

Linee di trasmissione

Consideriamo un'onda piana uniforme polarizzata linearmente che si propaga in un mezzo L-S-O-I-nonD, generalmente dissipativo:

$$\underline{\mathbf{E}}(z) = \underline{\mathbf{x}}_0 E_0 e^{-jkz} = \underline{\mathbf{x}}_0 E_x(z)$$

$$\underline{\mathbf{H}}(z) = \underline{\mathbf{y}}_0 H_0 e^{-jkz} = \underline{\mathbf{y}}_0 H_y(z)$$

$$\underline{\Pi}(z) = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{E}}(z) \times \underline{\mathbf{H}^*}(z) = \frac{1}{2} E_x(z) H_y^*(z) \underline{\mathbf{x}}_0 \times \underline{\mathbf{y}}_0 = \Pi(z)\underline{\mathbf{z}}_0$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(z) = -j\omega\mu \underline{\mathbf{H}}(z)$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}}(z) = j\omega\varepsilon_c \underline{\mathbf{E}}(z)$$

$$\Rightarrow$$

$$\left(\underline{\mathbf{z}}_0 \frac{d}{dz}\right) \times \left(\underline{\mathbf{x}}_0 E_x\right) = -j\omega\mu \underline{\mathbf{y}}_0 H_y$$

$$\left(\underline{\mathbf{z}}_0 \frac{d}{dz}\right) \times \left(\underline{\mathbf{y}}_0 H_y\right) = j\omega\varepsilon_c \underline{\mathbf{x}}_0 E_x$$

$$\frac{dE_x}{dz} = -j\omega\mu H_y$$

$$\frac{dH_y}{dz} = -j\omega\varepsilon_c E_x$$

Ponendo:

$$V(z) = E_x(z)$$

$$I(z) = H_y(z)$$

$$\widetilde{Z}_s = j\omega\mu \quad (\Omega/m)$$

$$\widetilde{Y}_p = j\omega\varepsilon_c \quad (S/m)$$

$$\frac{dV(z)}{dz} = -\widetilde{Z}_s I(z)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -\widetilde{Y}_p V(z)$$

$$\Pi(z) = \frac{1}{2} V(z) I^*(z)$$

Equazioni delle linee di trasmissione o dei telegrafisti

Soluzione delle equazioni delle linee di trasmissione

$$\frac{dV(z)}{dz} = -\tilde{Z}_s I(z)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -\tilde{Y}_p V(z)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2V(z)}{dz^2} = -\tilde{Z}_s \frac{dI(z)}{dz} = \tilde{Z}_s \tilde{Y}_p V(z) = -k_z^2 V(z)$$

$$-k_z^2 = \tilde{Z}_s \tilde{Y}_p$$

$$jk_z = \sqrt{\tilde{Z}_s \tilde{Y}_p}$$

<u>*per l'onda piana e uniforme:*</u>

$$k_z^2 = -\tilde{Z}_s \tilde{Y}_p = -j\omega\mu\; j\omega\varepsilon_c = \omega^2 \mu\varepsilon_c = k^2$$

<u>*per la linea bifilare:*</u>

$$k_z^2 = -\tilde{Z}_s \tilde{Y}_p = -(R + j\omega L)(G + j\omega C) = (\omega^2 LC - RG) - j\omega(LG + RC)$$

apollonio@die.uniroma1.it

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2}+k_z^2V(z)=0$$

risolta questa eq. si può calcolare la I(z)

$$I(z)=-\frac{1}{\tilde{Z}_s}\frac{dV(z)}{dz}$$

Oppure procedendo in modo duale:

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2}+k_z^2I(z)=0$$

$$V(z)=-\frac{1}{\tilde{Y}_p}\frac{dI(z)}{dz}$$

$$\boxed{V(z)=V_0^+e^{-jk_zz}+V_0^-e^{jk_zz}}$$

costanti complesse

$$k_z=k_{zR}-jk_{zJ}$$

Tensione di un'onda che si propaga nel verso positivo delle z

$$V^+(z)=V_0^+e^{-jk_zz}$$

Tensione di un'onda che si propaga nel verso negativo delle z

$$V^-(z)=V_0^-e^{jk_zz}$$

$$\boxed{V(z)=V^+(z)+V^-(z)}$$

Somma di due funzioni d'onda

apollonio@die.uniroma1.it

$$I(z) = -\frac{1}{\tilde{Z}_s}\frac{dV(z)}{dz} = -\frac{jk_z}{\tilde{Z}_s}\left(V_0^+ e^{-jk_z z} - V_0^- e^{jk_z z}\right) =$$

$$= \frac{1}{Z_0}\left(V_0^+ e^{-jk_z z} - V_0^- e^{jk_z z}\right) = \boxed{I_0^+ e^{-jk_z z} + I_0^- e^{jk_z z}}$$

impedenza caratteristica della linea

$$\begin{cases} Z_0 = \dfrac{\tilde{Z}_s}{jk_z} = \dfrac{\tilde{Z}_s}{\sqrt{\tilde{Z}_s \tilde{Y}_p}} = \sqrt{\dfrac{\tilde{Z}_s}{\tilde{Y}_p}} \\ I_0^+ = \dfrac{V_0^+}{Z_0} \\ I_0^- = -\dfrac{V_0^-}{Z_0} \end{cases}$$

$$\boxed{I(z) = I^+(z) + I^-(z)} \rightarrow$$

$$I^+(z) = I_0^+ e^{-jk_z z} = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-jk_z z} = \frac{1}{Z_0} V^+(z)$$

$$I^-(z) = I_0^- e^{jk_z z} = -\frac{V_0^-}{Z_0} e^{jk_z z} = -\frac{1}{Z_0} V^-(z)$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0}\left[V^+(z) - V^-(z)\right]$$

apollonio@die.uniroma1.it

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon_c}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} = \varsigma$$

per la linea di trasmissione associata ad un'onda piana uniforme

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} =$$

per la linea di trasmissione associata ad una linea bifilare

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0}$$

$$k_z \quad e \quad Z_0$$

costanti secondarie della linea

$$\tilde{Z}_s \quad e \quad \tilde{Y}_p$$

costanti primarie della linea

apollonio@die.uniroma1.it

Casi particolari (1)

$$V(0) = 0 \Rightarrow \textit{linea chiusa in corto circuito} \qquad V_0^+ = -V_0^-$$

$$V(z) = V_0^+\left(e^{-jk_z z} - e^{jk_z z}\right) = -2jV_0^+ \sin(k_z z) = -jZ_0 I(0)\sin(k_z z)$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0}V_0^+\left(e^{-jk_z z} + e^{jk_z z}\right) = 2\frac{V_0^+}{Z_0}\cos(k_z z) = I(0)\cos(k_z z)$$

Per k_z e Z_0 reali (linea priva di perdite) la fase di V(z) e I(z) non varia con z. L'onda è ***stazionaria****. V(z) e I(z) risultano sfasate di $\pi/2$*

$$P(z) = \frac{1}{2}V(z)I^*(z) = -\frac{1}{2}jZ_0 I_0 I_0^* \sin(k_z z)\cos(k_z z) = -\frac{1}{4}jZ_0 I_0 I_0^* \sin(2k_z z)$$

Potenza complessa trasportata lungo la linea che coincide con il vettore di Poynting complesso per l'onda piana e uniforme

apollonio@die.uniroma1.it

Casi particolari (2)

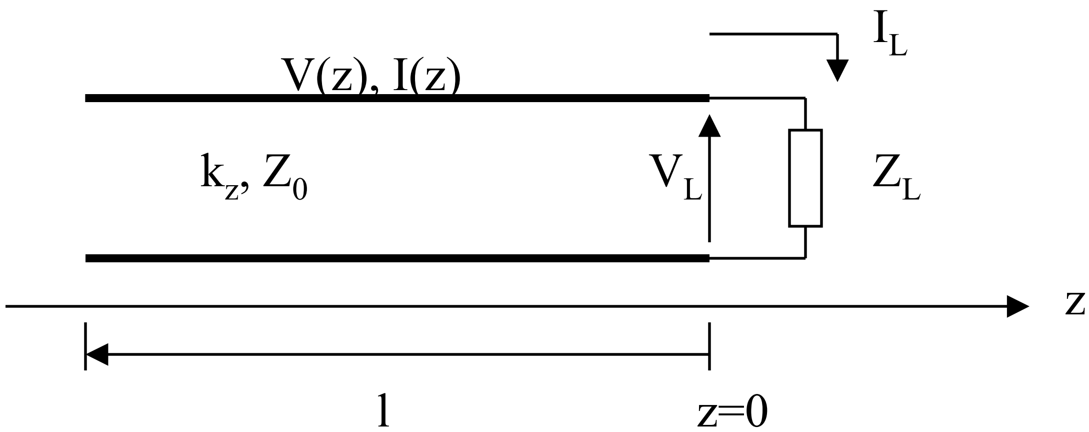
$$I(0)=0 \Rightarrow linea\ \ aperta \qquad\qquad V_0^+ = V_0^-$$

$$V(z)=V_0^+\left(e^{-jk_z z}+e^{jk_z z}\right)=2V_0^+\cos(k_z z)=V(0)\cos(k_z z)$$

$$I(z)=\frac{1}{Z_0}V_0^+\left(e^{-jk_z z}-e^{jk_z z}\right)=-2j\frac{V_0^+}{Z_0}\sin(k_z z)=-j\frac{V(0)}{Z_0}\sin(k_z z)$$

*Anche in questo caso se k_z e Z_0 reali (linea priva di perdite) la fase di V(z) e I(z) non varia con z. L'onda è **stazionaria**. V(z) e I(z) risultano sfasate di $\pi/2$*

apollonio@die.uniroma1.it



$$V(z) = V^{+}(z)$$

$$Z_0 = \frac{V(z)}{I(z)}$$

$$Z_0 \neq Z_L$$

$$Z_L = \frac{V(z=0)}{I(z=0)}$$

Generazione di un'onda riflessa

$$V(z) = V^{+}(z) + V^{-}(z) = V_0^{+} e^{-jk_z z} + V_0^{-} e^{jk_z z}$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0}\left(V_0^{+} e^{-jk_z z} - V_0^{-} e^{jk_z z}\right) = I_0^{+} e^{-jk_z z} + I_0^{-} e^{jk_z z}$$

$$Z_L = \frac{V_0^{+} + V_0^{-}}{V_0^{+} - V_0^{-}} Z_0 \Rightarrow V_0^{-} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} V_0^{+} \Rightarrow S_v = \frac{V_0^{-}}{V_0^{+}} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

apollonio@die.uniroma1.it

Ricapitolando

$$\frac{dV(z)}{dz} = -\tilde{Z}_s I(z)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -\tilde{Y}_p V(z)$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} + k_z^2 V(z) = 0$$

$$V(z) = V_0^+ e^{-jk_z z} + V_0^- e^{jk_z z}$$

$$Z_0 = \frac{V_0^+}{I_0^+}$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0}\left[V_0^+ e^{-jk_z z} - V_0^- e^{jk_z z}\right]$$

apollonio@die.uniroma1.it

Impedenza, ammettenza, coefficiente di riflessione

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} \Rightarrow impedenza \quad della \quad linea$$

$$S_v(z) = \frac{V^-(z)}{V^+(z)} \Rightarrow coefficiente \quad di \quad riflessione\, della\ tensione$$

$$S_v(z) = S_v(0) e^{2jk_z z}$$

Se la linea è chiusa in z=0 sull'impedenza di carico Z_L

$$Z(0) = Z_L$$

$$S_v(0) = \frac{V_0^-}{V_0^+}$$

$\longrightarrow$

per una linea priva di perdite:

$$|S_v(z)| = |S_v(0)| = \left| \frac{V_0^-}{V_0^+} \right|$$

apollonio@die.uniroma1.it

Le funzioni Z(z) e S_v(z) non sono indipendenti tra loro:

$$Z(z) = Z_0 \frac{V^+(z) + V^-(z)}{V^+(z) - V^-(z)} = Z_0 \frac{1 + \dfrac{V^-(z)}{V^+(z)}}{1 - \dfrac{V^-(z)}{V^+(z)}} = Z_0 \frac{1 + S_V(z)}{1 - S_V(z)}$$

$$Z(z)[1 - S_V(z)] = Z_0[1 + S_V(z)] \rightarrow \qquad S_V(z) = \frac{Z(z) - Z_0}{Z(z) + Z_0}$$

Per z=0

$$Z(0) = Z_L = Z_0 \frac{1 + S_V(0)}{1 - S_V(0)} \qquad S_V(0) = \frac{Z(0) - Z_0}{Z(0) + Z_0} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

apollonio@die.uniroma1.it

Casi particolari

Casi particolari di chiusura della linea:

1

$$Z_L = Z_0$$ <u>*Linea adattata*</u>

$$S_V(0) = 0 \qquad S_V(z) = S_v(0)e^{2jk_z z} = 0$$

$$S_v(0) = \frac{V_0^-}{V_0^+} \Rightarrow V_0^- = 0 \qquad Z(z) = Z_0 \frac{1 + S_V(z)}{1 - S_V(z)} \Rightarrow Z_0$$

<u>N.B</u>. la linea si considera adattata anche se è infinitamente lunga perché anche in questo caso manca di onda riflessa

---

2

$$V(0) = 0 \Rightarrow Z_L = 0$$ <u>*Linea chiusa in corto circuito*</u>

$$S_V(0) = -1 \Rightarrow V_0^- = -V_0^+$$ *se la linea è priva di perdite* $$|S_v(z)| = 1$$

3

$$I(0) = 0 \Rightarrow Z_L = \infty$$

Linea aperta

$$S_V(0) = 1 \Rightarrow V_0^- = V_0^+$$

se la linea è priva di perdite

$$\left| S_v(z) \right| = 1$$

4

$$Z_L = jX_L$$

inoltre se la linea è priva di perdite

$$S_V(0) = -\frac{Z_0 - jX_L}{Z_0 + jX_L} \Rightarrow \left| S_v(0) \right| = \frac{\sqrt{Z_0^2 + X_L^2}}{\sqrt{Z_0^2 + X_L^2}} = 1$$

$$\left| S_v(z) \right| = 1$$

$$\left| S_v(z) \right| = 1$$

riflessione totale

apollonio@die.uniroma1.it

Calcolo dell'impedenza a distanza z, Z(z), in funzione dell'impedenza di carico Z_L

$$Z(z) = Z_0 \frac{1+S_V(z)}{1-S_V(z)} = Z_0 \frac{1+S_V(0)e^{2jk_z z}}{1-S_V(0)e^{2jk_z z}} = Z_0 \frac{1+\dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{2jk_z z}}{1-\dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{2jk_z z}} =$$

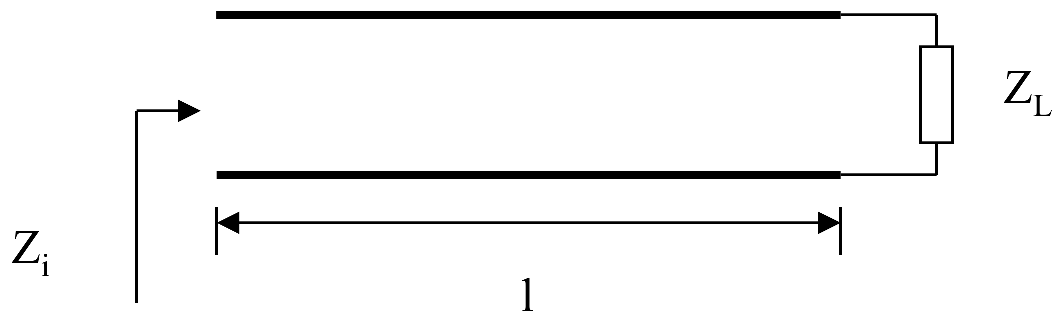
$$= Z_0 \frac{(Z_L + Z_0)e^{-jk_z z} + (Z_L - Z_0)e^{jk_z z}}{(Z_L + Z_0)e^{-jk_z z} - (Z_L - Z_0)e^{jk_z z}}$$

$$= Z_0 \frac{Z_L\left(e^{jk_z z} + e^{-jk_z z}\right) - Z_0\left(e^{jk_z z} - e^{-jk_z z}\right)}{Z_0\left(e^{jk_z z} + e^{-jk_z z}\right) - Z_L\left(e^{jk_z z} - e^{-jk_z z}\right)} =$$

$$= Z_0 \frac{Z_L \cos(k_z z) - jZ_0 \sin(k_z z)}{Z_0 \cos(k_z z) - jZ_L \sin(k_z z)}$$

Questa relazione permette di ricavare l'impedenza di ingresso Z_i=Z(-l) di una linea di lunghezza l chiusa in z=0 su una impedenza di carico assegnata Z_L

apollonio@die.uniroma1.it



$$Z_i = Z(-l) = Z_0 \frac{Z_L \cos(k_z l) + jZ_0 \sin(k_z l)}{Z_0 \cos(k_z l) + jZ_L \sin(k_z l)}$$

Casi particolari

1

$$Z_L = Z_0$$ Linea adattata

$$Z(z) = Z_0 \quad Z_i = Z_0$$

2

$$Z_L = 0$$ Linea in corto circuito

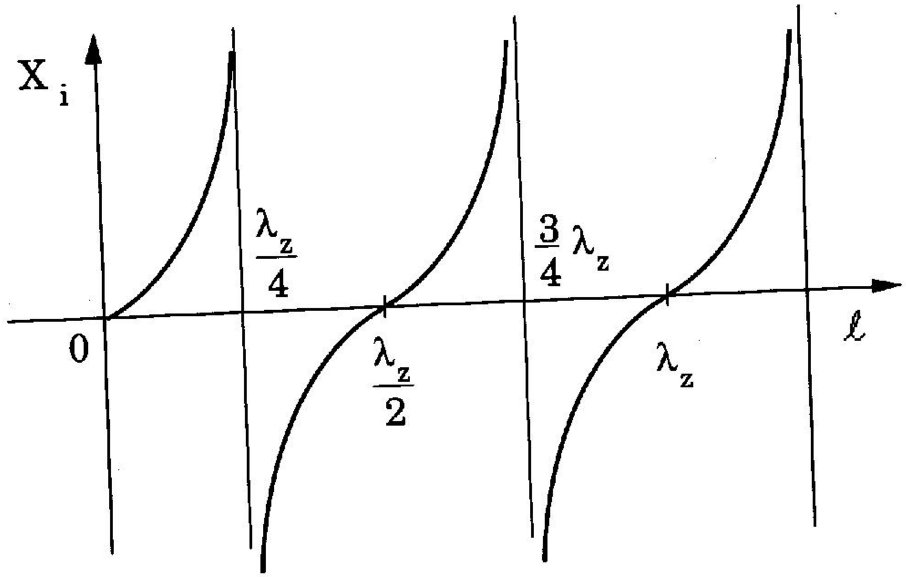
$$Z(z) = -jZ_0 \tan(k_z z) \quad Z_i = jZ_0 \tan(k_z l)$$

se la linea è priva di perdite $k_z = k_{zR}$

$$Z_i = jZ_0 \tan(k_{zR} l) = jX_i$$

$$X_i = Z_0 \tan(k_{zR} l)$$

apollonio@die.uniroma1.it



$$\lambda_z = \frac{2\pi}{k_{zR}}$$

3 $Z_L = \infty$ <u>*Linea aperta*</u>

$$Z(z) = jZ_0 \cot(k_z z) \quad Z_i = -jZ_0 \cot(k_z l)$$

se la linea è priva di perdite $k_z = k_{zR}$

$$Z_i = -jZ_0 \cot(k_{zR} l) = -jX_i$$

$$X_i = Z_0 \cot(k_{zR} l)$$

apollonio@die.uniroma1.it

Per particolari lunghezze l della linea, l'impedenza di ingresso Z_i assume valori tipici:

$$k_{zR}l = n\pi \quad (n = 1,2,..) \Rightarrow \qquad l = n\frac{\lambda_z}{2}$$

$$Z_i = Z(-l) = Z_0 \frac{Z_L \cos(k_z l) + jZ_0 \sin(k_z l)}{Z_0 \cos(k_z l) + jZ_L \sin(k_z l)} \qquad \boxed{Z_i = Z_L}$$

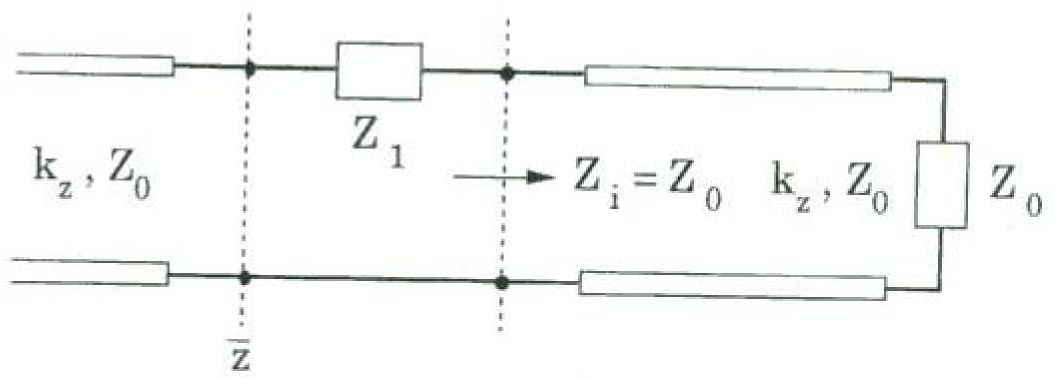
$$k_{zR}l = n\pi + \frac{\pi}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad (n = 0,1,2,..) \Rightarrow \quad l = (2n+1)\frac{\lambda_z}{4}$$

$$Z_i = Z(-l) = Z_0 \frac{Z_L \cos(k_z l) + jZ_0 \sin(k_z l)}{Z_0 \cos(k_z l) + jZ_L \sin(k_z l)} \qquad \boxed{Z_i = \frac{Z_0^2}{Z_L}}$$

Trasformatore in quarto d'onda: *l'impedenza caratteristica è la media geometrica di Z_i e Z_L*

apollonio@die.uniroma1.it

Esempi



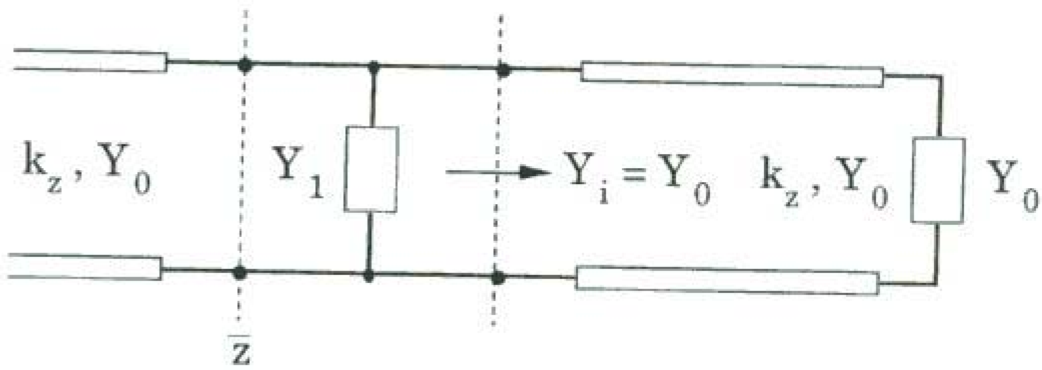
$$Z_i\left(\bar{z}\right) = ?$$

$$Z_i\left(\bar{z}\right) = Z_1 + Z_0$$

$$S_V\left(\bar{z}\right) = \frac{Z\left(\bar{z}\right) - Z_0}{Z\left(\bar{z}\right) + Z_0} = \frac{Z_1}{Z_1 + 2Z_0}$$

apollonio@die.uniroma1.it

Esempi

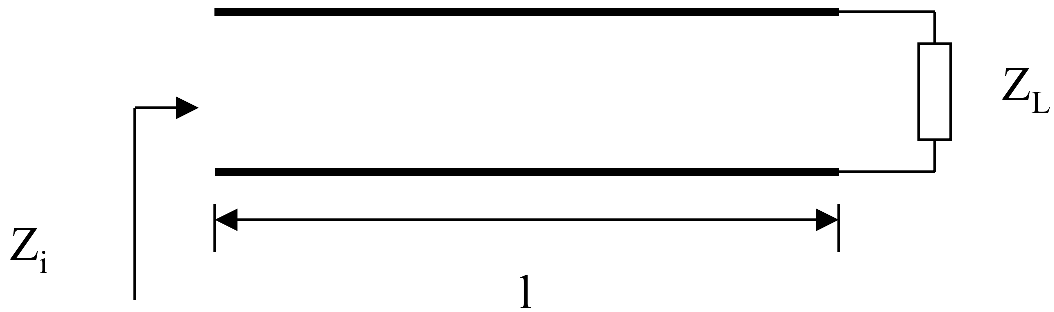


$$Y_i\left(\bar{z}\right) = ?$$

$$Y_i\left(\bar{z}\right) = Y_1 + Y_0$$

$$S_I\left(\bar{z}\right) = \frac{Y\left(\bar{z}\right) - Z_0}{Y\left(\bar{z}\right) + Z_0} = \frac{Y_1}{Y_1 + 2Y_0}$$

Potenza media lungo la linea



$$V(z) = V_0^+\left[e^{-jk_z z} + s_v(0)e^{jk_z z}\right]$$

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0}\left[e^{-jk_z z} - S_V(0)e^{jk_z z}\right]$$

$$P(z) = \frac{1}{2}V(z)I^*(z) \Rightarrow \textit{potenza complessa}$$

$$P_m(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[V(z)I^*(z)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\left|V_0^+\right|^2}{Z_0}\mathrm{Re}\left\{1 - S_V(0)^* e^{-2jk_z z} + S_V(0)e^{2jk_z z} - \left|S_V(0)\right|^2\right\} =$$

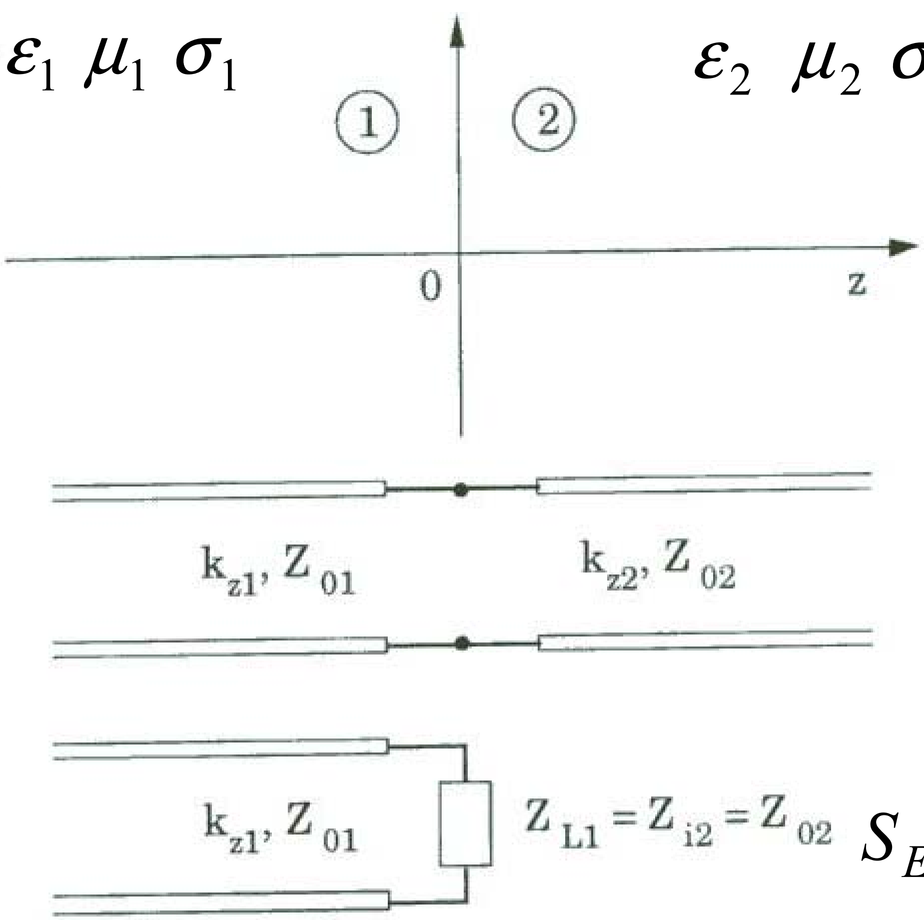
$$= \frac{1}{2}\frac{\left|V_0^+\right|^2}{Z_0}\left(1 - \left|S_V(0)\right|^2\right) = P_{in} - P_r$$

apollonio@die.uniroma1.it

Uso del formalismo delle linee di trasmissione per lo studio della riflessione delle onde piane e uniformi (1)

L-S-O-I-nonD

$\varepsilon_1 \ \mu_1 \ \sigma_1$ $\qquad$ $\varepsilon_2 \ \mu_2 \ \sigma_2$



$$Z_{L1} = Z_{i2} = Z_{02} = \varsigma_2$$

$$k_{z1} = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_{c1}} = k_1 \qquad Z_{01} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_{c1}}} = \varsigma_1$$

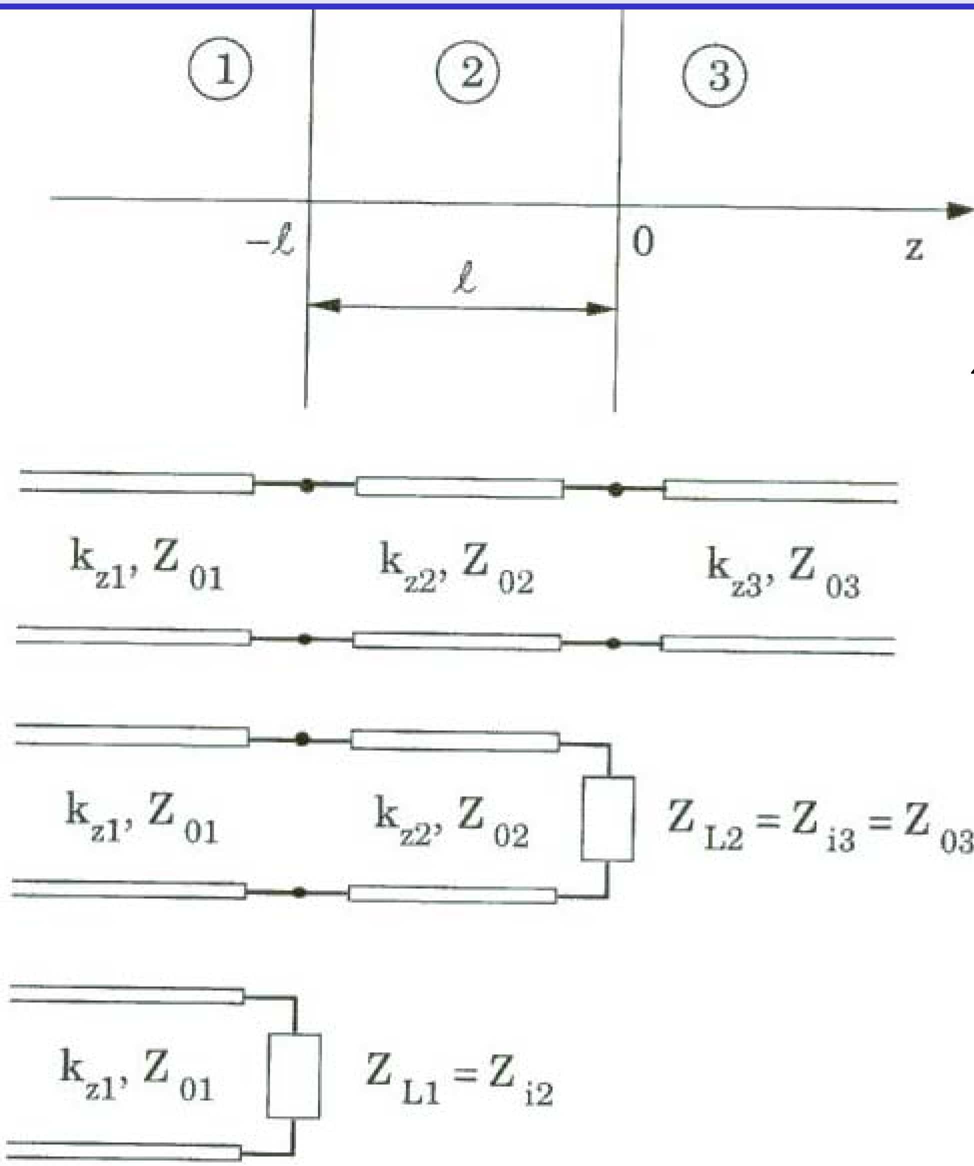
$$k_{z2} = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_{c2}} = k_2 \qquad Z_{02} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_{c2}}} = \varsigma_2$$

$$S_{E1} = S_{V1}(0) = \frac{Z_{L1} - Z_{01}}{Z_{L1} + Z_{01}} = \frac{\varsigma_2 - \varsigma_1}{\varsigma_1 + \varsigma_2}$$

$$S_{V2}(0) = 0$$

apollonio@die.uniroma1.it

(2)



$$Z_{L2} = Z_{i3} = Z_{03} = \varsigma_3$$

$$k_{zi} = \omega\sqrt{\mu_i \varepsilon_{ci}} = k_i$$

$$Z_{0i} = \sqrt{\frac{\mu_i}{\varepsilon_{ci}}} = \varsigma_i$$

$$i = 1,2,3$$

apollonio@die.uniroma1.it

$$Z_{L1} = Z_{i2} = Z_{02} \frac{Z_{L2}\cos(k_{z2}l) + jZ_{02}\sin(k_{z2}l)}{Z_{02}\cos(k_{z2}l) + jZ_{L2}\sin(k_{z2}l)}$$

$$S_{E1} = S_{V1}(-l) = \frac{Z_{L1} - Z_{01}}{Z_{L1} + Z_{01}}$$

Supponiamo che i tre mezzi siano non dissipativi $k_z = k_{zR}$ *e che risulti*

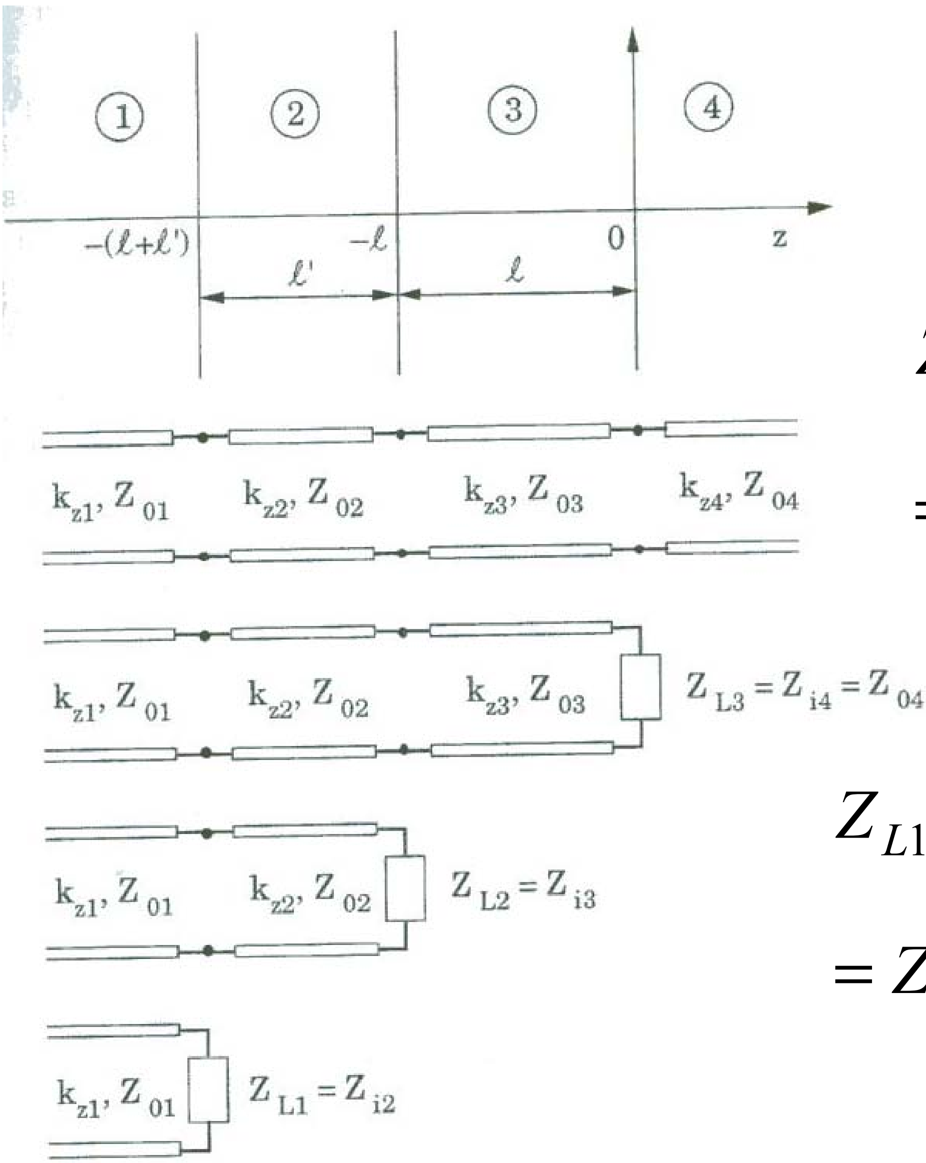
$$l = \frac{\lambda_{z2}}{4} = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{k_{zR2}} = \frac{\pi}{2k_{zR2}} \Rightarrow k_{z2}l = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad Z_{L1} = Z_{i2} = \frac{Z_{02}^2}{Z_{L2}} = \frac{\varsigma_2^2}{\varsigma_3}$$

Se quindi il mezzo 2 viene scelto in modo da porre $Z_{L1} = Z_{01} = \varsigma_1$

$$\varsigma_1 = \frac{\varsigma_2^2}{\varsigma_3} \Rightarrow \boxed{S_{E1} = S_{v1}(-l) = 0}$$

apollonio@die.uniroma1.it

(3)



$$Z_{L3} = Z_{i4} = Z_{04} = \varsigma_4$$

$$Z_{L2} = Z_{i3} =$$

$$= Z_{03} \frac{Z_{L3}\cos(k_{z3}l) + jZ_{03}\sin(k_{z3}l)}{Z_{03}\cos(k_{z3}l) + jZ_{L3}\sin(k_{z3}l)}$$

$$Z_{L1} = Z_{i2} =$$

$$= Z_{02} \frac{Z_{L2}\cos(k_{z2}l') + jZ_{02}\sin(k_{z2}l')}{Z_{02}\cos(k_{z2}l') + jZ_{L2}\sin(k_{z2}l')}$$

$$S_{E1} = S_{V1}\left(-l - l'\right) = \frac{Z_{L1} - Z_{01}}{Z_{L1} + Z_{01}}$$

Supponiamo che il mezzo che occupa la regione 4 sia un buon conduttore

$$Z_{04} = \varsigma_4 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_4}{\sigma_4 + j\omega\varepsilon_4}} \cong \sqrt{\frac{j\omega\mu_4}{\sigma_4}} \cong 0$$

$$Z_{L2} = Z_{i3} = jZ_{03}\tan\left(k_{z3} l\right)$$

Supponiamo che il mezzo che occupa la regione 3 sia non dissipativo $k_z = k_{zR}$
e che

$$l = \frac{\lambda_{z3}}{4} \Rightarrow k_{z3} l = \frac{\pi}{2}$$

$$Z_{L2} = Z_{i3} = \infty \Rightarrow$$

$$Z_{L1} = Z_{i2} = -jZ_{02}\frac{\cos\left(k_{z2} l'\right)}{\sin\left(k_{z2} l'\right)}$$

apollonio@die.uniroma1.it

Se supponiamo inoltre che $\left|k_{z2}\right| l' << 1 \Rightarrow \cos\left(k_{z2} l'\right) \cong 1$

$$\sin\left(k_{z2} l'\right) \cong k_{z2} l'$$

$$Z_{L1} = Z_{i2} = \frac{Z_{02}}{j k_{z2} l'} = \frac{\sqrt{\dfrac{\widetilde{Z}_{s2}}{\widetilde{Y}_{p2}}}}{\sqrt{\widetilde{Z}_{s2}\widetilde{Y}_{p2}}\, l'} = \frac{1}{\widetilde{Y}_{p2} l'} = \frac{1}{\left(\sigma_2 + j\omega\varepsilon_2\right) l'} \cong$$

$$\cong \frac{1}{\sigma_2\, l'}$$

Scegliendo opportunamente i valori

$$Z_{L1} = \cong \frac{1}{\sigma_2\, l'} = Z_{01} = \varsigma_1 \Rightarrow \qquad S_{E1} = S_{V1}\left(-l - l'\right) \cong 0$$